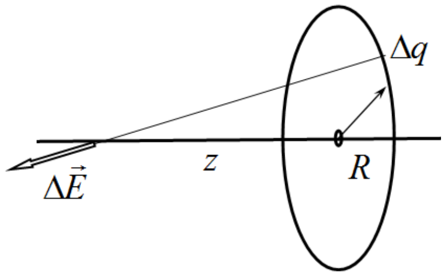
Задача 11-1. «Электростатическая пушка»

1.1 Вектор напряженности электростатического поля кольца направлен вдоль его оси. Модуль вектора напряженности легко находится с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$



1.2 В промежутке времени, когда шарик и кольцо заряжены, на шарик действует электрическая сила

$$F = qE. \tag{2}$$

Так время действия силы мало, то можно пренебречь смещением шарика за время действия силы. В этом случае скорость шарика может быть найдена из 2 закона Ньютона в импульсной форме

$$mv = qE\tau \quad \Rightarrow \quad v = \frac{q\tau}{m}E. \tag{3}$$

Как следует из последнего равенства, скорость шарика будет максимальна, если он находится в точке с максимальной напряженностью.
Для того, чтобы найти эту точку вычислим производную от функции (1)

$$\left(\frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)' = \frac{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}} - z\frac{3}{2}\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2z}{\left(z^2 + R^2\right)^3} = \frac{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(z^2 + R^2 - 3z^2\right)}{\left(z^2 + R^2\right)^3} = 0$$

И приравняем ее к нулю. Из этого условия следует, что напряженность поля максимальна на расстоянии

$$z^* = \frac{R}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

от центра кольца. Это максимальное значение равно

$$E_{\max}\left(z^*\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{R^2}{2} + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}. \tag{5}$$

Подставляя это выражение в формулу (3) для скорости, получим ответ на поставленный вопрос:

$$v_{\max} = \frac{\tau}{m}\frac{q^2}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}. \tag{6}$$

<u>Часть 2 Шарик не заряжается.</u>

2.1 Сила, действующая на диполь, также находится с помощью принципа суперпозиции:

$$F = qE\left(z + a\right) - qE(z) = qa\frac{\Delta E}{a} = p\frac{\Delta E}{\Delta z} \tag{7}$$

2.2 Сила, действующая на шарик с индуцированным дипольным моментом, рассчитывается по формуле

$$F = p\frac{dE}{dz} = 4\pi\varepsilon_0 r^3 E\frac{dE}{dz}\,. \tag{8}$$

На больших расстояниях напряженность поля кольца совпадает с напряженностью поля точечного заряда (что следует из формулы (1)):

$$E \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2} \tag{9}$$

Производная от этой функции равна

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^3}\,. \tag{10}$$

Собирая все записанные формулы воедино, получим выражение для силы, действующей на незаряженный проводящий шарик

$$F = p\frac{dE}{dz} = 4\pi\varepsilon_0 r^3\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^3}\right) = \frac{q^2 r^3}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^5}\,. \tag{11}$$