Задача 11-2. Поле пластин

Часть 1

1.1. Рассмотрим выражение

$$\Delta S\cos\theta: \qquad (1)$$

данное выражение представляет проекцию площади участка на плоскость перпендикулярную вектору $\vec{r}$. В силу малости участка можно считать, что выражение (1) есть часть площади поверхности сферы радиуса r, которая стягивает телесный угол $\Delta\Omega$. Тогда пользуясь определением телесного угла, находим:

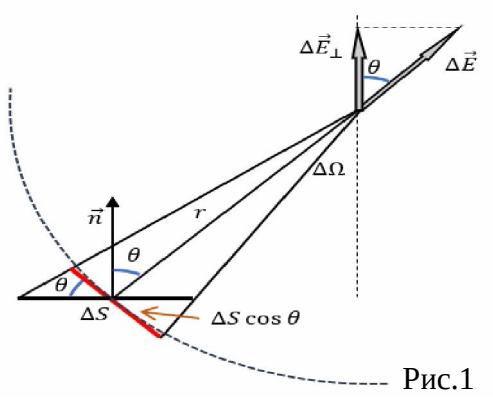


Рис.1

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S\cos\theta}{r^2} \qquad (2)$$

1.2. Разобьём всю плоскую площадку на малые участки ΔS. Заряд такого участка:

$$\Delta q = \sigma\Delta S \qquad (3)$$

Величина напряженности электростатического поля, создаваемого данным участком, определяется выражением:

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta S}{r^2} \qquad (4)$$

Компонента поля $\Delta E_\perp$, перпендикулярная заряженной плоскости, тогда (см.рис.1):

$$\Delta E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta S}{r^2}\cos\theta \qquad (5)$$

Воспользовавшись выражением (2), доказанном в п.1.1, получаем:

$$\Delta E_\perp = \frac{\sigma\Delta\Omega}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (6)$$

Согласно принципу суперпозиции для вектора напряженности электростатического поля, находим, что:

$$\vec{E} = \sum\overrightarrow{\Delta E} \rightarrow E_\perp = \sum\Delta E_\perp = \sum\frac{\sigma\Delta\Omega}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sum\Delta\Omega = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (7)$$

1.3. Бесконечная равномерно заряженная плоскость стягивает телесный угол

$$\Omega = 2\pi \qquad (8)$$

Тогда в соответствии с (7):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (9)$$

- хорошо известный результат!

1.4. Изобразим на рис.2 конус, ограничивающий телесный угол, под которым «виден» равномерно заряженный диск. Угол полураствора данного конуса определяется выражением:

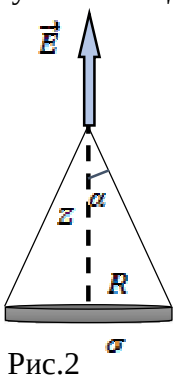


Рис.2

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \qquad (10)$$

Тогда телесный угол при вершине построенного конуса можно определить, воспользовавшись подсказкой:

$$\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \qquad (11)$$

Величина перпендикулярной компоненты напряженности электростатического поля в соответствии с (7):

$$E_\perp(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \qquad (12)$$

Из осевой симметрии системы следует, что вектор напряженности поля направлен вдоль оси диска, поэто формула (12) дает и модуль вектора напряженности поля:

$$E(z) = E_\perp(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \qquad (12')$$

При $z \ll R$ получаем приближенное выражение

$$E(z) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{R}\right), \qquad (13)$$

видим, что величина напряженности поля линейно убывает.

В другом предельном случае $z \gg R$ получаем:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)\right) = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}, \qquad (14)$$

т.е. на большом удалении поле диска совпадает с полем точечного заряда.

Для построения графика (рис.3) зависимости $E(z)$ воспользуемся относительными координатами: $E' = \frac{E}{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}, \xi = \frac{z}{R}$

На графике также отображены приближения: при $z \ll R \leftrightarrow \xi \ll 1$ и $z \gg R \leftrightarrow \xi \gg 1$.

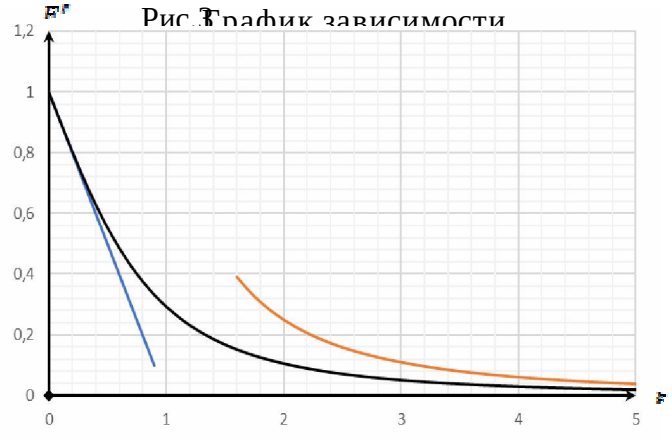


Рис.3 График зависимости

1.5. Для получения ответа в данном пункте определим, под каким телесным углом «видна» часть бесконечной равномерно заряженной плоскости без отверстия:

$$\Omega^{'} = \Omega_{пл} - \Omega_{диска} = 2\pi\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \tag{15}$$

Тогда величина напряженности поля на оси симметрии данной системы в соответствии с (7):

$$E = \frac{\sigma\Omega^{'}}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \tag{16}$$

При $z \ll R$:

$$E(z) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{R}, \tag{17}$$

видим, что величина напряженности поля линейно возрастает.

При $z \gg R$:

$$\mathrm{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{z}^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{z}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0 \mathrm{R}}\left(1-\frac{\mathrm{R}^2}{2\mathrm{z}^2}\right), \tag{18}$$

поле совпадает с полем бесконечной равномерно заряженной плоскости и отрицательного точечного заряда.

Для построения графика (рис.4) зависимости $E(z)$ опять воспользуемся относительными координатами: $E^{'} = \frac{E}{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}, \xi = \frac{z}{R}$.

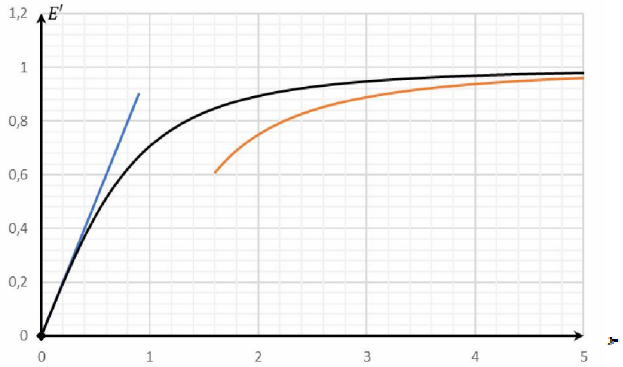


Рис.4 График зависимости

На графике также отображены приближения при $z \ll R \leftrightarrow \xi \ll 1$ и $z \gg R \leftrightarrow \xi \gg 1$.

1.6. Для возникновения колебаний нужна возвращающая сила, в нашем случае, заряд должен притягиваться к центру отверстия вдоль оси, следовательно, это должен быть отрицательный заряд:

$$Q < 0 \tag{19}$$

Сила, действующая на точечный заряд Q в электростатическом поле $\vec{E}$, определяется выражением:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \tag{20}$$

Запишем тогда 2-ой закон Ньютона для заряда Q, находящегося на оси симметрии системы на малом расстоянии $z \ll R$ от центра отверстия:

$$m\vec{a} = Q\vec{E}(z) \tag{21}$$

В проекциях на ось Oz :

$$ma_z = -|Q|E(z) = -|Q|\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{R} \tag{22}$$

Преобразуем (22), чтобы получить уравнение гармонических колебаний:

$$a_z + \frac{\sigma|Q|}{2\varepsilon_0 mR}z = 0 \tag{23}$$

И тогда для циклической частоты и периода гармонических колебаний можем записать:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sigma|Q|}{2\varepsilon_0 mR}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 mR}{\sigma|Q|}} \tag{24}$$

Часть 2.

2.1 Бесконечные равномерно заряженные пластины создают одинаковое по модулю однородное электростатическое поле:

$$E^+ = E^- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{25}$$

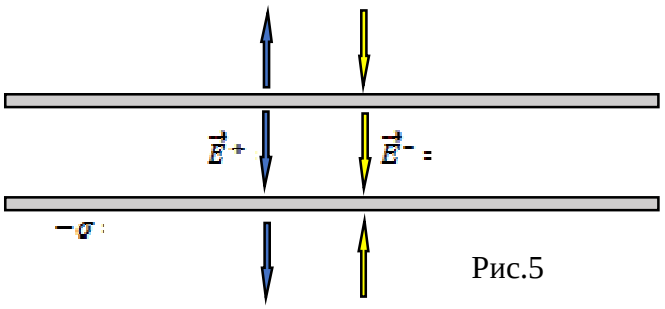
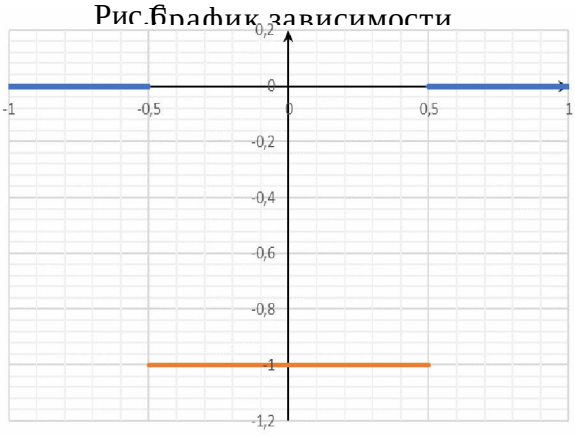


Рис.5

В соответствии с рисунком 5 электростатическое поле снаружи отсутствует ввиду того, что E^+ и E^- одинаковы по модулю и противоположны по направлению. Величина напряженности электростатического поля между пластинами определяется суммой модулей E^+ и E^-, так как между пластинами их направления совпадают.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{26}$$

Рис.6 График зависимости



2.1 Рассмотрим вначале поле между пластинами конденсатора. Проведем вспомогательные конические поверхности (рис.7а), ограничивающие телесные углы, которые стягиваются пластинами конденсатора.

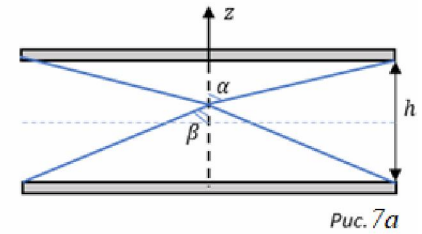


Рис. 7а

Тогда положительной пластине соответствует угол полураствора конуса α , а отрицательной – β .

Определим косинусы этих углов для расчета телесных углов:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}, \cos\beta = \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \tag{27}$$

И соответствующие телесные углы:

$$\Omega_\alpha = 2\pi(1 - \cos\alpha) = 2\pi\left(1 - \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}\right) \tag{28}$$

$$\Omega_\beta = 2\pi(1 - \cos\beta) = 2\pi\left(1 - \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}}\right) \tag{29}$$

Проекции векторов напряженности на ось Oz :

$$E_z^+ = -\frac{\sigma\Omega_\alpha}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad E_z^- = -\frac{\sigma\Omega_\beta}{4\pi\varepsilon_0} \tag{30}$$

По принципу суперпозиции:

$$E_z(z) = E_z^+ + E_z^- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(2 - \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} - \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}}\right) \tag{31}$$

Приведем аналогичные результаты для поля снаружи конденсатора (рис.7б):

$$\cos\alpha = \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}, \cos\beta = \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \tag{32}$$

$$\Omega_\alpha = 2\pi(1 - \cos\alpha) = 2\pi\left(1 - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}\right) \tag{33}$$

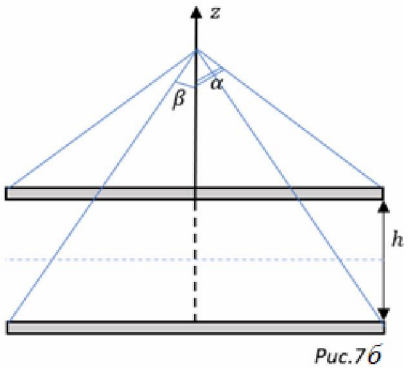


Рис.7б

$$\Omega_\beta = 2\pi(1-\cos\beta) = 2\pi\left(1-\frac{z+\frac{h}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2}+z\right)^2}}\right) \quad (34)$$

$$E_z(z) = E_z^+ + E_z^- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z+\frac{h}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2}+z\right)^2}} - \frac{z-\frac{h}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2}-z\right)^2}}\right) \quad (35)$$

Отметим, что на больших расстояниях найденное поле соответстсвует полю точечного диполя, т.е. убавает обратно пропорционально кубу расстояния

Схематический график в этом случае имеет вид

РисГрафик

2.1. Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - |E(0)|}{|E(0)|}\cdot 100\% \quad (37)$$

Таблица. Результат расчета относительной погрешности определения напряженности электростатического поля внутри конденсатора:

$\frac{R}{h}$	$\varepsilon, \%$
1	81
10	5,3
100	0,50