Задача 9.2. Почему линии электропередач высоковольтные?

Часть 1. Элементарное введение.

1.1 Мощность электрического тока рассчитывается по формуле

$$P = \frac{U_0^2}{R}, \tag{1}$$

Откуда следует, что сопротивление лампочки равно

$$R = \frac{U_0^2}{P} = 484\,\text{Ом}, \tag{2}$$

1.2 Так как напряжения на обеих лампочках номинальное, то они работают в номинальном режиме, поэтому суммарная мощность просто равна сумме мощностей:

$$P_\Sigma = P_1 + P_2 = 160\,\text{Вт}. \tag{3}$$

1.3 При последовательном соединении лампочек сила тока через них одинакова, поэтому суммарную мощность удобнее представить в виде

$$P_\Sigma = I^2 R_1 + I^2 R_2 = I^2 (R_1 + R_2). \tag{4}$$

Сопротивления лампочек выразим через их номинальные мощности с помощью формулы (2):

$$P_\Sigma = I^2 (R_1 + R_2) = I^2 \left(\frac{U_0^2}{P_1} + \frac{U_0^2}{P_2} \right) = I^2 U_0^2 \left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} \right). \tag{5}$$

Учитывая, что произведение силы тока на напряжение источника равно суммарной мощности в цепи $IU_0 = P_\Sigma$, получим красивое выражение для мощностей

$$\frac{1}{P_\Sigma} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}, \tag{6}$$

Из которого находим суммарную мощность

$$P_\Sigma = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} = 37{,}5\,\text{Вт}. \tag{7}$$

Часть 2. Линия электропередачи.

2.1 Напряжение на нагрузке в данном случае определяется по формуле

$$U = IR = \frac{U_0}{R + r} R. \tag{8}$$

2.2 Так как полезная нагрузка и провода соединены последовательно, то сила через все элементы цепи одинакова. Поэтому коэффициент потерь может быть найден по формуле

$$\eta_{\text{пот.}} = \frac{P_{\text{пот.}}}{P} = \frac{I^2 r}{I^2 (R + r)} = \frac{r}{R + r} \tag{9}$$

2.3 Рассчитаем сопротивление подводящих проводов (не забудьте, что их два):

$$r = \rho \frac{8L}{\pi d^2} = 216\,\text{Ом}. \tag{10}$$

И сопротивление нагрузки

$$R = \frac{U_0^2}{P} = 48{,}4\ \text{Ом}. \qquad (11)$$

Напряжение на нагрузке рассчитывается по формуле (8)

$$U = \frac{U_0}{R + r} R = 40\ \text{В}. \qquad (12)$$

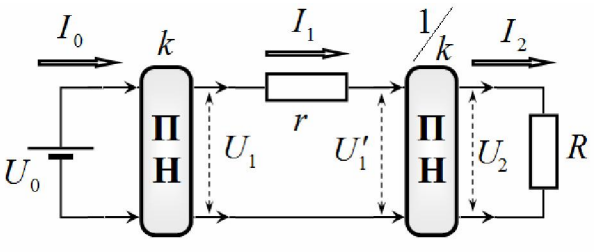
А коэффициент потерь по формуле (9)

$$\eta_{\text{пот.}} = \frac{r}{R + r} = 0{,}82 = 82\% \qquad (13)$$

Таким образом, оказывается, что при передаче электроэнергии всего на 5 км напряжение падает более, чем в 5 раз и при этом более 80% энергии теряется в проводах!

Часть 3. Линия с преобразованием напряжения.

3.1 Для расчета параметров цепи введем обозначения сил токов и напряжений, показанные на рисунке.



Расчет удобнее начинать от потребителя.

Пусть напряжение на нагрузке равно U_2.

Сила тока через нагрузку определяется законом Ома

$$I_2 = \frac{U_2}{R}. \qquad (14)$$

Тогда, мощность, потребляемая полезной нагрузкой, равна

$$P = \frac{U_2^2}{R} \qquad (15)$$

Напряжение на входе второго понижающего преобразователя равно

$$U_1' = kU_2, \qquad (16)$$

Сила тока в линии электропередачи находится из условия постоянства мощности

$$U_2 I_2 = U_1' I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_2^2}{R \cdot kU_2} = \frac{U_2}{kR}. \qquad (17)$$

Напряжение на выходе первого повышающего преобразователя можно найти из выражения:

$$U_1 = I_1 r + U_1' = \frac{U_2}{kR} r + kU_2 = kU_2\left(1 + \frac{r}{k^2 R}\right) \qquad (18)$$

С другой стороны, это же напряжения можно выразить через напряжение источника

$$U_1 = kU_0. \qquad (19)$$

Из двух последних выражений следует

$$kU_2\left(1 + \frac{r}{k^2 R}\right) = kU_0 \quad \Rightarrow U_2 = \frac{U_0}{1 + \frac{r}{k^2 R}} = U_0 \frac{R}{R + \frac{r}{k^2}} \quad . \qquad (20)$$

Теперь можно записать и формулу для силы тока через нагрузку

$$I_2 = \frac{U_2}{R} = \frac{U_0}{R + \frac{r}{k^2}} \quad . \qquad (21)$$

3.2 Из полученных формул для напряжения и силы тока (20)-(21) следует, что повышение напряжения в линии передачи в k раз формально равносильно понижению сопротивления линии в k^2 раз.

3.3 Для расчета коэффициента потерь можно воспользоваться формулой (13) с соответствующим изменение сопротивления проводов:

$$\eta'_{\text{пот.}} = \frac{r}{k^2 R + r} = 4{,}5 \cdot 10^{-6} \qquad (22)$$

Таким образом, при повышении напряжения в 1000 раз потери энергии уменьшаются почти в 200 тысяч раз!!!