## Задача 3. Эффект Эйнштейна-де-Гааза

1. В полном соответствии с теоретическим введением момент импульса электрона, вращающегося по круговой орбите вокруг ядра атома, определяется соотношением:

$$L = m_e vr \tag{1}$$

2. Электрон, движущийся по круговой орбите, аналогичен круговому току, сила которого может быть записана в виде:

$$i = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \tag{2}$$

Тогда магнитный момент такого кругового тока:

$$p_m = i\pi r^2 = \frac{evr}{2} \tag{3}$$

Не стоит забывать о том, что момент импульса и магнитный момент, - это векторные величины. Вследствие того, что электрон – отрицательно заряженная частица, а за направление тока принято направление движения положительно заряженных частиц, соответствующие моменты направлены в разные стороны.

3. Выразим гиромагнитное отношение с использованием (1) и (3), с учетом направления векторов:

$$\overrightarrow{p_m} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L} \tag{4}$$

$$g = \frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m_e} = 8,78\cdot 10^{10}\,\frac{Кл}{кг} \tag{5}$$

4. Рассмотрим момент импульса всех электронов, отвечающих за магнитные свойства цилиндра. Используя гиромагнитное отношение, свяжем значение суммарного момента импульса электронов с магнитными моментами каждого из них:

$$\overrightarrow{L_e} = -\frac{2m_e}{e}\sum_{(i)}\overrightarrow{p_{mi}} \tag{6}$$

Изменение момента импульса электронов при изменении магнитных моментов:

$$\overrightarrow{\Delta L_e} = -\frac{2m_e}{e}\sum_{(i)}\overrightarrow{\Delta p_{mi}} \tag{7}$$

Поскольку суммарный момент импульса цилиндра не изменяется, можно записать:

$$\overrightarrow{\Delta L_e} + \overrightarrow{\Delta L_{цил}} = 0 \longrightarrow \overrightarrow{\Delta L_{цил}} = -\overrightarrow{\Delta L_e} \tag{8}$$

И по итогу:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цил}} = \frac{2m_e}{e}\sum_{(i)}\overrightarrow{\Delta p_{mi}} \tag{9}$$

5. При изменении направления магнитного поля на противоположные магнитные моменты электронов, вращающихся на круговых орбитах, переворачиваются:

$$\overrightarrow{\Delta p_m} = -2\overrightarrow{p_m} \tag{10}$$

Тогда в соответствии с (9) получаем:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цил}} = \frac{2m_e}{e}(-2\overrightarrow{p_m})N\,, \tag{11}$$

Где $N$ – количество электронов, отвечающих за магнитные свойства образца. Поскольку количество таких электронов совпадает с числом атомов, получаем:

$$N = \frac{m}{M}N_A \tag{12}$$

И в итоге:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цил}} = -\frac{4m_e}{e}\frac{m}{M}N_A\overrightarrow{p_m} \tag{13}$$

Исходя из изменения момента импульса цилиндра найдем конечную угловую скорость вращения:

$$\Delta L_{цил} = I\Delta\omega = \frac{4m_e}{e}\frac{m}{M}N_A p_m \tag{14}$$

Откуда с учетом выражения для момента инерции цилиндра получаем:

$$\omega = \frac{8m_e}{eMr^2}N_A p_m \tag{15}$$

6. Вывод уравнения крутильных колебаний цилиндра:

Изменение момента импульса:

$$\frac{dL}{dt} = I\alpha''(t) \tag{16}$$

Оно связано с действием следующих вращающих моментов:

А) Возвращающий момент

$$M_1 = -I\omega_0^2\alpha(t)\,, \tag{17}$$

отвечающий за собственные крутильные колебания с циклической частотой $\omega_0$;

Б) Момент сил вязкого трения, описанный в условии задачи:

$$M_2 = -k\alpha'(t)\,, \tag{18}$$

где $\alpha'(t)$ - угловая скорость вращения цилиндра;

В) Механический момент, связанный с перемагничиванием цилиндра во внешнем переменном магнитном поле, любезно предоставленный авторами задачи:

$$M_3 = \frac{4P_m}{\pi g}\omega\cos\omega t \qquad (19)$$

Уравнение динамики вращательного движения цилиндра тогда:

$$\frac{dL}{dt} = M_1 + M_2 + M_3 \qquad (20)$$

Уравнение крутильных колебаний цилиндра во внешнем переменном магнитном поле с учетом всех приближений, описанных в условии задачи выглядит следующим образом:

$$I\alpha''(t) = -I\omega_0^2\alpha(t) - k\alpha'(t) + \frac{4P_m}{\pi g}\omega\cos\omega t \qquad (20)$$

7. Подставим в уравнение (20) функцию, описанную в условии задачи: $\alpha(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Для подстановки выразим производные от данной функции по времени:

$$\alpha'(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi) \qquad (21)$$

$$\alpha''(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) \qquad (22)$$

Подставляя (21), (22) в (20), и учитывая, что частота колебаний внешнего переменного магнитного поля равна собственной частоте колебаний системы $\omega = \omega_0$, получаем:

$$\alpha(t) = \frac{4P_m}{\pi g k}\sin(\omega t)\text{, т.е. } A = \frac{4P_m}{\pi g k}, \varphi = 0 \qquad (23).$$

8. Выразим тогда гиромагнитное отношение:

$$g = \frac{4P_m}{\pi|\alpha_{\max}|k} = 8,7\cdot 10^{10} \qquad (24)$$

9. Отличие измеренного значения гиромагнитного отношения от предсказываемого теорией объясняется наличием собственного магнитного момента электрона и ядра атома – спина.