

Задание 11-2. Движение в поле. (Решение).

Часть 1. Прямолинейное движение в магнитном поле.

1.1 Во время движения бусинки в магнитном поле на бусинку действует сила Лоренца, направленная перпендикулярно стержню (перпендикулярно плоскости рисунка)

$$F_L = qvB \sin \alpha. \quad (1)$$

Под действием этой силы бусинка будет прижиматься к стержню, вследствие чего возникнет сила трения, направленная в сторону противоположную вектору скорости

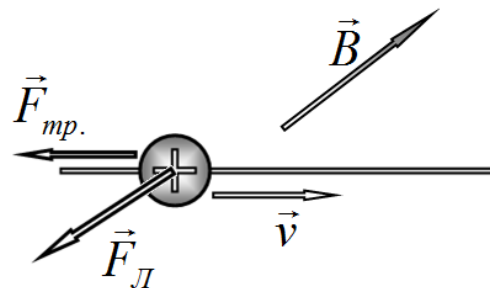
$$F_{тр.} = \mu qvB \sin \alpha. \quad (2)$$

На основании второго закона Ньютона ускорение бусинки выражается формулой

$$a = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m} v. \quad (3)$$

Ускорение бусинки направлено в сторону, противоположную вектору скорости, поэтому это выражение можно представить в векторной форме

$$\vec{a} = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m} \vec{v}. \quad (4)$$



1.2 Так как ускорение отрицательно, то модуль скорости будет монотонно убывать до нуля, с постоянно уменьшающимся ускорением. Схематический график этой зависимости показан на рисунке.



1.3 Так нам необходимо найти путь до остановки (не важно за какое время), то в уравнении (3) избавимся от времени:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m} v \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m} v \Rightarrow \quad (5)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m}$$

Мы учли, что $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$. Из полученного уравнения следует, что скорость бусинки линейно уменьшается по мере увеличения пройденного пути. Из этого уравнения следует, что путь, пройденный до остановки равен

$$S_1 = \frac{mv_0}{\mu q B \sin \alpha} \quad (6)$$

1.4 Так как $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, то ни модуль силы Лоренца, ни модуль силы трения не изменятся, иными словами уравнение (4) останется справедливым и в случае изменения направления вектора начальной скорости. Следовательно, и в этом случае пройденный путь будет определяться формулой (6):

$$S_2 = S_1. \quad (7)$$

$$S_2 = \frac{mv_0^2}{2qE(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}. \quad (8)$$

Часть 2. Движение по окружности в электрическом поле.

2.1 Движение без электрического поля.

2.1.1 При движении по окружности бусинка движется с центростремительным ускорением равным

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (9)$$

Это ускорение может сообщить только сила нормальной реакции со стороны кольца, равная

$$N = m \frac{v^2}{R}. \quad (10)$$

Поэтому на бусинку также действует сила трения, равная

$$F_{mp.} = \mu m \frac{v^2}{R}. \quad (11)$$

Наличие силы трения приводит к тому, что скорость (следовательно, и кинетическая энергия) бусинки уменьшается. Если бусинка сместилась по кольцу на малый угол $\Delta\varphi$, то уменьшение кинетической энергии бусинки равно работе силы трения, что выражается уравнением

$$\Delta E = -F_{mp.} \Delta S = -\mu m \frac{v^2}{R} \cdot R \Delta\varphi = -2\mu \frac{mv^2}{2} \Delta\varphi = -2\mu E \Delta\varphi. \quad (12)$$

Из этого уравнения следует, что уменьшение энергии пропорционально текущему значению энергии. Если обозначить значение энергии в начале рассматриваемого интервала - E_0 , а в конце интервала - E_1 , то связь между ними задается выражением

$$E_1 = E_0(1 - 2\mu\Delta\varphi), \quad (13)$$

Что и доказывает убывание энергии в геометрической прогрессии.

2.1.2 Как показано в предыдущей части кинетическая энергия, следовательно, и скорость при повороте на любой угол $\Delta\varphi$ убывают в геометрической прогрессии. Тогда скорость при повороте на один оборот может быть выражена следующим образом

$$v_1 = v_0(1 - \eta). \quad (14)$$

Где $\eta = 0,20$. При повороте на 5 оборота скорость станет равной

$$v_5 = v_0(1 - \eta)^5. \quad (15)$$

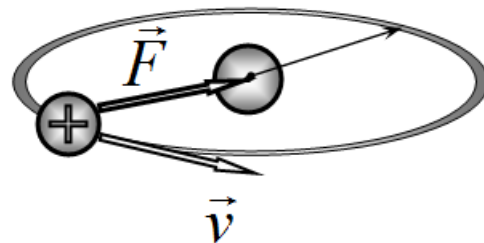
Подстановка численного значения дает результат

$$v_1 = v_0(1 - \eta)^5 = v_0 \cdot 0,8^5 \approx 0,33v_0 . \quad (16)$$

что соответствует уменьшению скорости на 67%.

2.2 Движение в электрическом поле.

2.2.1 Силу нормальной реакции, следовательно, силу трения можно уменьшить с помощью силы электростатического взаимодействия, которая должна быть направлена к центру кольца. Это возможно в том случае, если в центр кольца поместить отрицательный заряд.



2.2.2 В этом случае уравнение 2 закона Ньютона в проекции на радиальное направление будет иметь вид

$$m \frac{v^2}{R} = N + qE_0 . \quad (17)$$

Следовательно, сила нормальной реакции будет равна

$$N = m \frac{v^2}{R} - qE_0 . \quad (18)$$

Сила нормальной реакции и сила трения станут равными нулю при

$$m \frac{v^2}{R} - qE_0 = 0 \Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{qE_0 R}{m}} . \quad (19)$$

При этой скорости бусинка будет двигаться без трения, т.е. с постоянной по модулю скоростью.

2.2.3 Если сила нормальной реакции отлична от нуля, то независимо от ее направления сила трения будет направлена в сторону, противоположную вектору скорости. Поэтому модуль скорости всегда будет уменьшаться и стремиться к одному из стационарных значений.

В случае а) $v_0 > v^*$: стремиться к значению

$$v^* = \sqrt{\frac{qE_0 R}{m}} ;$$

В случаях б) $0 < v_0 < v^*$ скорость бусинки будет стремиться к нулю.

Схематические графики этих зависимостей показаны на рисунке. Горизонтальной пунктирной линией отмечено значение v^* .

