

Задание 10-2. Гемодинамика - артериальная система. Решение.

Часть 1. Предварительные расчеты.

1.1 Формулы:

1.1.1 Расход жидкости может быть выражен формулой

$$q = vS, \quad (1)$$

где $S = \pi R^2$ - площадь поперечного сечения трубы, v - средняя по поперечному сечению скорость течения, которая может быть выражена через расход жидкости, как

$$v = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2}. \quad (2)$$

1.1.2 Очевидно, что время движения жидкости по трубе равно

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\pi R^2 L}{q}. \quad (3)$$

Это же выражение может быть представлено, как объем трубы, деленный на расход жидкости $t = \frac{V}{q}$.

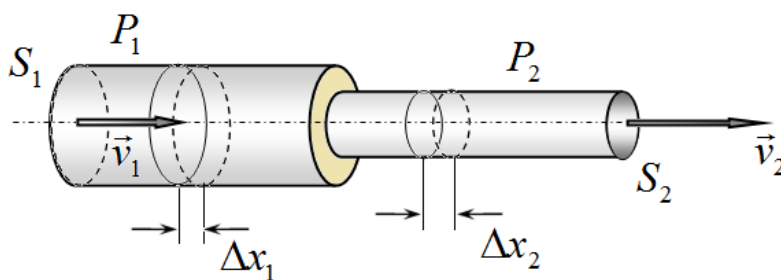
1.1.3 Из формулы Пуазейля легко выразить разность давлений через расход жидкости

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} q. \quad (4)$$

1.2 Обозначим скорость течения жидкости в первой трубе v_1 , во второй - v_2 ; площади поперечных сечений - S_1, S_2 , давления в трубах P_1, P_2 . Так как жидкость является идеальной, то давление изменяется скачком только в области стыка двух труб. Рассмотрим порцию жидкости, находящуюся между двумя произвольно выбранными сечениями (одно в широкой части трубы, второе в узкой части). Пусть за малый промежуток времени первое сечение сместилось на расстояние Δx_1 , тогда второе сечение сместится на расстояние Δx_2 . Так как жидкость несжимаема, то выполняется соотношение

$$\Delta V = S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2. \quad (5)$$

Эта величина имеет смысл объема, протекшего через поперечное сечение трубы за рассматриваемый промежуток времени. Скорость этой порции жидкости изменилась от v_1 до v_2 . Следовательно, возросла и кинетическая энергия этой порции жидкости. Изменение кинетической энергии обусловлено работой внешних сил (т.е. сил давления жидкости на выделенную порцию), поэтому можно записать:



$$P_1 S_1 \Delta x_1 - P_2 S_2 \Delta x_2 = \frac{1}{2} \rho S_1 \Delta x_1 (v_2^2 - v_1^2). \quad (6)$$

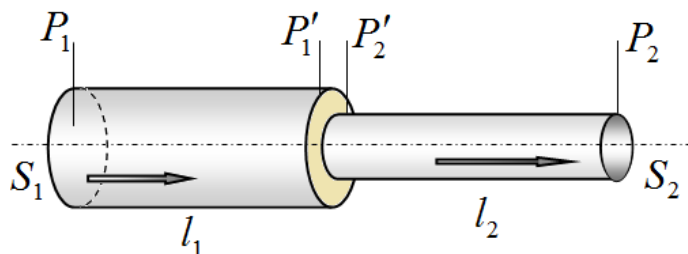
Учитывая соотношение (5), получим уравнение (которое фактически является уравнением Бернулли):

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2). \quad (7)$$

Скорости течения жидкости выразим через расход жидкости $v = \frac{q}{S}$ и подставим в уравнение (7):

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right). \quad (8)$$

1.3 При течении вязкой жидкости давление изменяется и в пределах трубы постоянного течения. Обозначим давления в различных сечениях, как показано на рисунке.



Запишем уравнения для изменения давлений на всех участках составной трубы (используя формулы (4) и (8)):

$$\begin{aligned} P_1 - P_1' &= \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4} q \\ P_1' - P_2' &= \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right). \\ P_2' - P_2 &= \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4} q \end{aligned} \quad (9)$$

И просуммируем эти выражения:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) + \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4} q + \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4} q. \quad (10)$$

В результате чего получаем квадратное уравнение, правда с громоздкими коэффициентами:

$$\frac{1}{2\pi^2} \rho \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) q^2 + \frac{8\eta l}{\pi} \left(\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4} \right) q - \Delta P = 0. \quad (11)$$

При решении этого уравнения следует выбрать положительный корень:

$$q = \frac{\sqrt{b^2 + a\Delta P} - b}{a}. \quad (12)$$

где

$$a = \frac{1}{2\pi^2} \rho \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right); \quad b = \frac{4\eta l}{\pi} \left(\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4} \right).$$

1.4 При решении этой задачи можно повторить все рассуждения п.1.2, а в окончательной формуле (8) под S_2 следует понимать суммарную площадь всех присоединенных труб, поэтому

$$\delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left(\frac{1}{n^2 R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right). \quad (13)$$

Заметим, что эта разность давлений может быть отрицательной.

Часть 2. Характеристики кровотока в артериальной системе человека.

2.1.1 – 2.1.5 Для расчета требуемых характеристик следует воспользоваться уже полученными формулами, которые следует слегка модернизировать с учетом числа сосудов в каждой группе. Приведем эти формулы, необходимые для расчетов:

Расход крови через один сосуд в группе:

$$q_i = \frac{q_0}{n_i}, \quad (14)$$

Где $q_0 = 6,0 \frac{\text{л}}{\text{мин}} = 6,0 \frac{10^{-3} \text{ м}^3}{60 \text{ с}} = 1,0 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$ - суммарный расход крови.

Площадь поперечного сечения сосуда в группе

$$S_i = \frac{\pi d_i^2}{4} \quad (15)$$

Средняя скорость течения крови в сосуде:

$$v_i = \frac{q_i}{S_i}. \quad (16)$$

Время движения через сосуд

$$t_i = \frac{l_i}{v_i}. \quad (17)$$

Разность давлений на концах сосуда

$$\Delta P_i = \frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4} q_i = \frac{8\pi\eta l_i}{(\pi R_i^2)^2} q_i = 8\pi\eta \frac{l_i}{S_i^2} q_i. \quad (18)$$

Скачок давлений на стыке сосудов

$$\delta P_i = \frac{1}{2\pi^2} \rho q_i^2 \left(\frac{1}{\left(\frac{n_{i+1}}{n_i} \right)^2 R_{i+2}^4} - \frac{1}{R_i^4} \right) = \frac{\rho q_0^2}{2} \left(\frac{1}{(n_{i+1} S_{i+1})^2} - \frac{1}{(n_i S_i)^2} \right). \quad (19)$$

Интересно отметить, что при замкнутом круге обращения (когда суммарные площади сечений в начале и конце цикла равны) сумма этих скачков давлений равна нулю.

Суммарные характеристики рассчитываются очевидным способом, как суммы соответствующих характеристик в каждой группе.

Теоретический тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

Результаты расчетов по приведенным формулам приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Расчетные характеристики артериальной системы человека

Группа сосудов	Средняя скорость течения крови, v_i , м/с	Время движения t_i , с	Разность давлений на концах сосуда ΔP_i , Па	Скачок давления при переходе в следующую группу δP_i , Па
Аорта	0,54	1,10	180	-36
Крупные артерии	0,47	0,99	4560	-83
Мелкие артерии	0,24	0,25	7450	-29
Капилляры	0,0012	0,51	1400	-

Общее время движения крови по артериальной системе равно 2,0 с.

Разность давлений на входе и выходе из артериальной системы (сумма двух последних столбцов) равно 13 кПа, что примерно равно 100 мм рт. ст. Следует отметить, что скачки давлений в местах разветвления сосудов, во-первых, отрицательны (т.к. общая площадь поперечных сечений сосудов в каждой группе увеличивается); во-вторых, не слишком значительны.

2.2 Разумно считать, что разность давлений в венозной системе также примерно равна 100 мм рт. ст. Поэтому суммарное давление, которое должно создавать сердце, примерно в два раза превышает реальное сердечное давление. Основная причина такого существенного расхождения заключается в том, что сосуды функционируют гораздо сложнее, чем жесткие трубки. Они проходят через различные мышцы тела, которые могут способствовать лучшему протеканию крови, т.е. работают как своеобразные «микронасосы».