

Задание 3. Изменение мощности. Решения.

Часть 1. Один реостат.

Мощность электроплитки рассчитывается по формуле $P = \frac{U_0^2}{R}$. Поэтому в относительных единицах эта величина равна

$$p = \frac{U_0^2 R_0}{R U_0^2} = \frac{1}{r}. \quad (1)$$

1.1 Так как вторая часть реостата «закорочена», то «работает» только его первая часть, поэтому сопротивлением между клеммами равно

$$R = R_0 \frac{x}{l}. \quad (2)$$

Или в относительных единицах

$$r = z. \quad (3)$$

Тогда мощность плитки равна

$$p = \frac{1}{z}. \quad (4)$$

1.2 В этом случае ситуация обратная, поэтому

$$r = 1 - z. \quad (5)$$

И мощность

$$p = \frac{1}{1 - z}. \quad (6)$$

1.3 Не сложно заметить, что в данном случае два участка реостата подключены к клеммам параллельно, поэтому общее сопротивление равно

$$R = \frac{R_x(R_0 - R_x)}{R_0}. \quad (7)$$

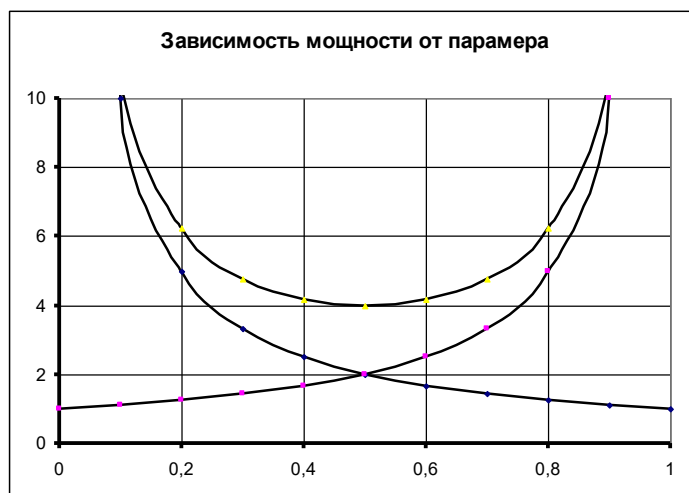
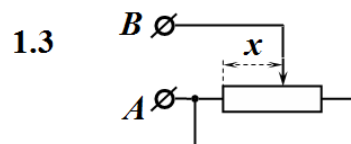
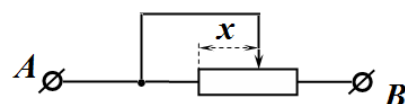
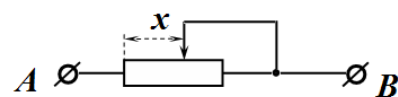
В относительных единицах эта функция имеет вид

$$r = z(1 - z). \quad (8)$$

Формула для мощности имеет вид

$$p = \frac{1}{z(1 - z)}. \quad (9)$$

Графики этих функция показаны на рисунке.



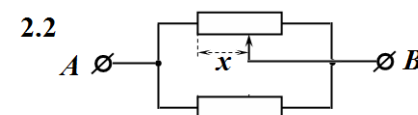
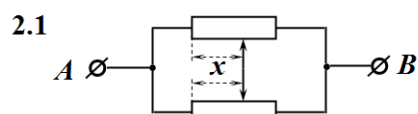
Часть 2. Два реостата.

2.1 В этой схеме электрический ток через переключку не идет, поэтому мы имеем два параллельно соединенных реостата. Общее сопротивление не зависит от положения движков реостата и равно

$$R_{AB} = \frac{R_0}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow p = z. \quad (10)$$

2.2 В этой схеме параллельно соединены участок первого реостата и полностью второй реостат. Сопротивление такой схемы равно

$$R_{AB} = \frac{R_0 R_x}{R_0 + R_x} \Rightarrow r = \frac{z}{1+z} \Rightarrow p = \frac{1+z}{z}. \quad (11)$$



Часть 3. Нелинейный реостат.

3.1 Зависимость сопротивления цепи от величины x описывается функцией

$$R_{AB} = \frac{R(x)(R_0 - R(x))}{R_0}. \quad (12)$$

В этом выражении величина R_0 также неизвестна. Однако ее можно найти, анализируя зависимость R_{AB} от $R(x)$. Как следует из выражения (8) эта функция достигает максимума при $R(x) = \frac{R_0}{2}$, при этом

$$(R_{AB})_{\max} = \frac{R(x)(R_0 - R(x))}{R_0} = \frac{\frac{R_0}{2} \left(R_0 - \frac{R_0}{2} \right)}{R_0} = \frac{R_0}{4}. \quad (13)$$

В таблице 1 находим, что $(R_{AB})_{\max} = 25,0 \text{ Ом}$. Следовательно,

$$R_0 = 100 \text{ Ом}. \quad (14)$$

3.2 Теперь уравнение (8) можно переписать в безразмерных параметрах

$$r_{AB} = r(z)(1 - r(z)). \quad (15)$$

Данное уравнение является квадратным относительно функции $r(z)$:

$$r^2 - r + r_{AB} = 0. \quad (16)$$

Полное решение этого уравнения задается выражениями:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4r_{AB}}}{2} \\ r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4r_{AB}}}{2} \end{cases}. \quad (17)$$

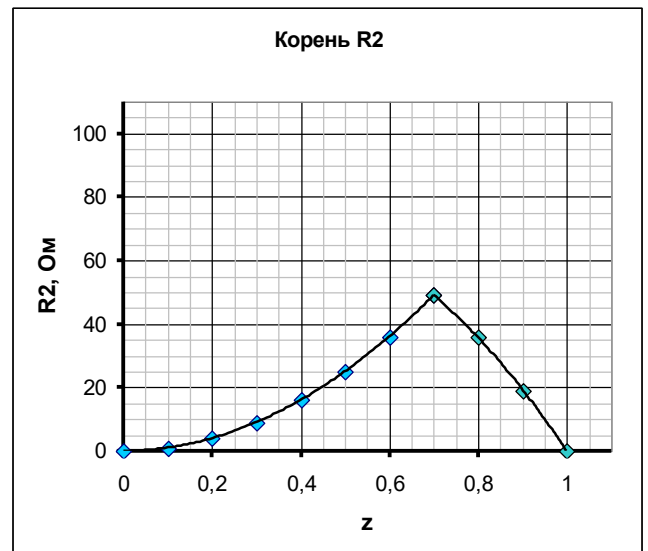
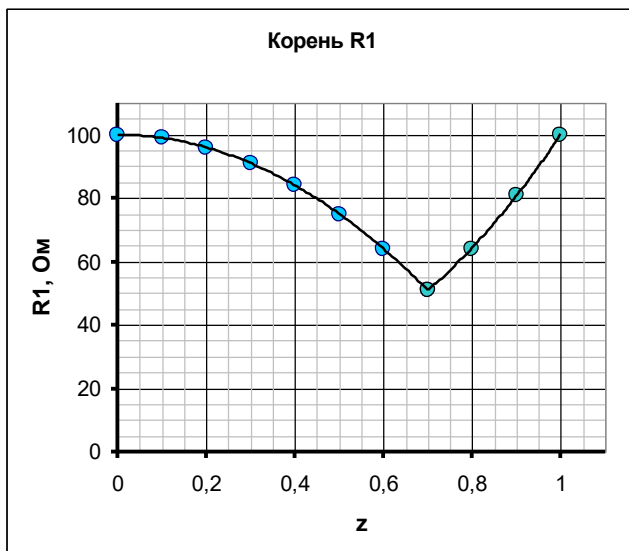
В Таблице приведены значения корней уравнения (8) в зависимости от параметра z (корни безразмерного уравнения (12) рассчитаны по формулам (13)).

Теоретический тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

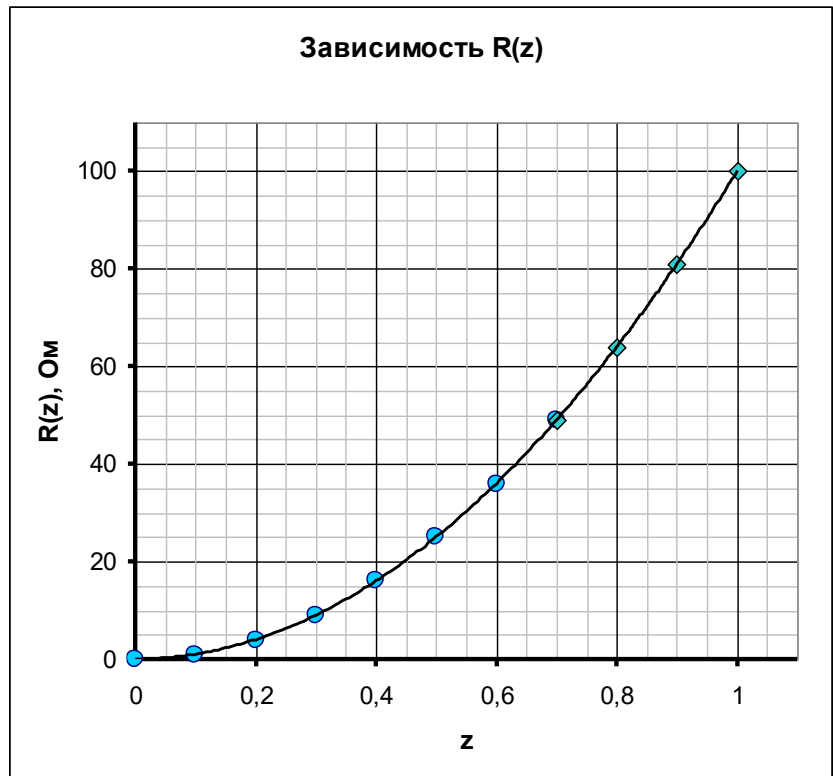
z	$R_{AB}, \text{ Ом}$	$r_{AB} = \frac{R_{AB}}{R_0}$	$R_1 = R_0 r_1$	$R_2 = R_0 r_2$
0,0	0,0	0,000	100,00	0,00
0,1	1,0	0,010	99,00	1,00
0,2	3,8	0,038	96,00	4,00
0,3	8,2	0,082	91,00	9,00
0,4	13,4	0,134	84,00	16,00
0,5	18,8	0,188	75,00	25,00
0,6	23,0	0,230	64,00	36,00
0,7	25,0	0,250	51,00	49,00
0,8	23,0	0,230	64,00	36,00
0,9	15,4	0,154	81,00	19,00
1,0	0,0	0,000	100,00	0,00

Ниже показаны графики этих рассчитанных значений.



По своему физическому смыслу полученная функция должна быть монотонно возрастающей, так сопротивление никакого участка реостата не может быть отрицательным. Поэтому, полученные решения надо правильно сшить, как показано в таблице и на графике.

z	$R(z)$, Ом
0,0	0,0
0,1	1,0
0,2	4,0
0,3	9,0
0,4	16,0
0,5	25,0
0,6	36,0
0,7	49,0
0,8	64,0
0,9	81,0
1,0	100,0



3.3 Легко заметить, что данная функция является квадратичной (значения сопротивлений – квадраты целых чисел) и описывается формулой

$$R(z) = R_0 z^2. \quad (18)$$

3.4 График зависимости мощности реостата от параметра z имеет вид, показанный на рисунке.

