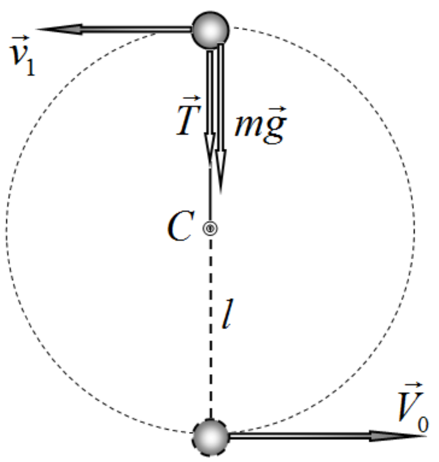
Задача 10-2. Шарик на нити.

Часть 1. Полный оборот.



1.1 Чтобы шарик сделал полный оборот мало, чтобы он поднялся в верхнюю точку траектории. Необходимо, чтобы в верхней точке шарик имел скорость v_1 достаточную для того, чтобы нить оставалась натянутой, т.е. сила натяжения $\vec{T}$ должна быть чуть больше нуля.

Для определения этой скорости запишем уравнение второго закона Ньютона для шарика в верхней точке в проекции на вертикальную ось:

$$m\frac{v_1^2}{l} = mg + T\,, \qquad (1)$$

Здесь $\frac{v_1^2}{l}$ - центростремительное ускорение шарика.

Из уравнения (1) следует, что эта скорость должна удовлетворять условию

$$T \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 \geq gl\,. \qquad (2)$$

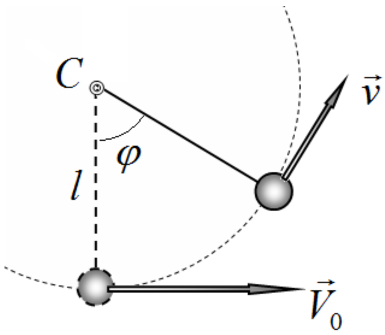
Чтобы найти скорость в нижней точке можно воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} + 2mgl = \frac{mV_0^2}{2}\,. \qquad (3)$$

Из этого уравнения следует (с учетом соотношения (2)), что минимальная скорость равна

$$V_0^2 = v_1^2 + 4gl = 5gl \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{5gl}\,. \qquad (4)$$

1.2 Для расчета времени одного оборота найдем зависимость модуля скорости шарика от угла отклонения от вертикали φ. Для этого опять воспользуемся законом сохранения энергии:



$$\frac{mv^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi) = \frac{mV_0^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{V_0^2 + 2gl(1-\cos\varphi)} = \sqrt{gl(7-2\cos\varphi)} \tag{4}$$

Скорость сложным образом зависит от его координаты. Поэтому приближенный расчет времени движения может быть проведен численно. Для этого необходимо вычислить сумму

$$T = \sum_k \frac{l\Delta\varphi}{v_k}. \tag{5}$$

Для строго расчета необходимо устремить шаг $\Delta\varphi$ к нулю, в этом случае сумма перейдет в соответствующий интеграл. Однако этот интеграл не выражается через элементарные функции, поэтому все равно должен вычисляться численно.

Подставим выражение для скорости (4) в формулу для периода вращения (5)

$$T = \sum_k \frac{l\Delta\varphi}{v_k} = \sum_k \frac{l\Delta\varphi}{\sqrt{gl(7-2\cos\varphi_k)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sum_k \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{(7-2\cos\varphi_k)}} = C\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{6}$$

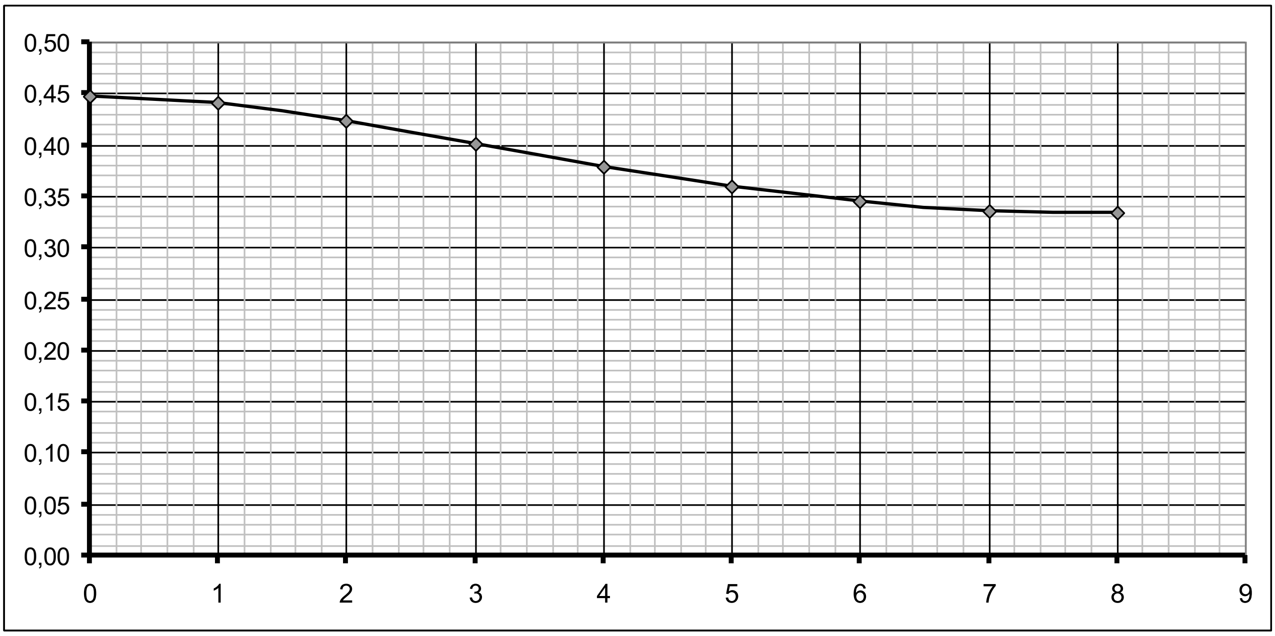
Так как время подъема равно времени опускания шарика равны, то для ускорения расчета достаточно вычислить сумму для угла φ в пределах от 0 до π.

Построим «по точкам» график функции $f(\varphi_k) = \dfrac{1}{\sqrt{(7-2\cos\varphi_k)}}$ с шагом $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{8}$.

Таблица значений функции $f(\varphi_k)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
φ_k	$0\cdot\frac{\pi}{8}$	$1\cdot\frac{\pi}{8}$	$2\cdot\frac{\pi}{8}$	$3\cdot\frac{\pi}{8}$	$4\cdot\frac{\pi}{8}$	$5\cdot\frac{\pi}{8}$	$6\cdot\frac{\pi}{8}$	$7\cdot\frac{\pi}{8}$	$8\cdot\frac{\pi}{8}$
f_k	0,447	0,441	0,423	0,400	0,378	0,359	0,345	0,336	0,333

Ниже показан график этой функции.



Функция изменяется достаточно медленно, поэтому расчет по 8 рассчитанным точкам должен дать результат с хорошей точностью.

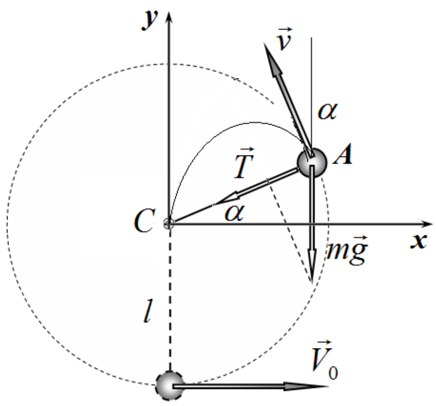
Проведенное численное суммирование по этим точкам привело к результату $C = 2{,}413$.

Если считать, что движение является равноускоренным (то есть просуммировать по двум крайним точкам), то получается значение $C = 2{,}45$ - различие меньше 5%. Поэтому окончательно формула для времени одного оборота следующая

$$T \approx 2{,}41\sqrt{\frac{g}{l}}\ . \qquad (7)$$

Часть 2. Попадание в точку подвеса.

2.1 Если начальная скорость шарика не достаточна для того, чтобы шарик достиг верхней точки, то сначала он будет двигаться по дуге окружности радиуса l (на этом участке нить подвеса натянута). Когда сила натяжения нити стане равной нулю, нить изогнется, а шарик дальше будет двигаться по параболе.



Пусть сила натяжения нити стала равной нулю в некоторой точке A (см. рис.), положение которой будем задавать углом наклона нити к горизонту α. На основании 2 закона Ньютона для шарика, находящегося в точке A, можно записать уравнение

$$\frac{mv^2}{l} = T + mg\sin\alpha \qquad (8)$$

Так как в этой точке сила натяжения равна нулю, то скорость v в этой точке связана с углом α следующим соотношением

$$v^2 = gl\sin\alpha \qquad (9)$$

Второе уравнение, связывающее эти параметры, следует из закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgl(1+\sin\alpha) = \frac{mV_0^2}{2} \quad \Rightarrow$$
$$V_0^2 = v^2 + 2gl(1+\sin\alpha) \qquad (10)$$

Введем систему координат, как показано на рисунке. Запишем закон движения шарика после точки A, при движении по параболе в поле тяжести земли. (с учетом координат начальной точки A и проекций скорости):

$$\begin{cases} x = l\cos\alpha - (v\sin\alpha)\cdot t \\ y = l\sin\alpha + (v\cos\alpha)\cdot t - \dfrac{g}{2}t^2 \end{cases} . \qquad (11)$$

Уравнения (9)-(11) позволяют полностью описать движение шарика.

Пусть шарик попадает в точку подвеса в некоторый момент времени t_1, в этот момент времени $x = 0,\ y = 0$, поэтому из закона движения (11) следует

$$x = l\cos\alpha - (v\sin\alpha)\cdot t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha}$$

$$y = l\sin\alpha + (v\cos\alpha)\cdot t_1 - \frac{g}{2}t_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l\sin\alpha + (v\cos\alpha)\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{l}{\sin\alpha} - \frac{gl^2}{2v^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$$

(12)

Подставим выражение (9) для квадрата скорости и получим уравнение для угла α

$$\frac{l}{\sin\alpha}-\frac{gl^2}{2gl\sin\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1. \tag{13}$$

Решая это уравнение, получим единственное значения угла α:

$$\cos^2\alpha=2\sin^2\alpha \quad\Rightarrow\quad 1-\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha \quad\Rightarrow$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad . \tag{14}$$

Теперь с помощью уравнений (9)-(10) не сложно найти требуемую начальную скорость

$$V_0^2=v^2+2gl(1+\sin\alpha)=gl\sin\alpha+2gl(1+\sin\alpha)=gl(2+3\sin\alpha)=gl\left(2+\sqrt{3}\right) \tag{15}$$

Окончательный ответ этой части задачи:

$$V_0=\sqrt{gl\left(2+\sqrt{3}\right)}. \tag{16}$$

Часть 3. Попадание в точку старта.

В этом случае характер движения и уравнения (9)-(11), его описывающие, такие же, как в предыдущей части. Только в этом случае надо задать другие конечные условия.

Пусть шарик попадает в начальную точку в некоторый момент времени t_2, в этот момент времени $x=0,\ y=-l$, поэтому уравнение для определения угла α несколько изменится

$$x=l\cos\alpha-(v\sin\alpha)\cdot t_2=0 \quad\Rightarrow\quad t_2=\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha}$$

$$y=l\sin\alpha+(v\cos\alpha)\cdot t_2-\frac{g}{2}t_2^2=-l \quad\Rightarrow\quad l\sin\alpha+(v\cos\alpha)\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha}-\frac{g}{2}\left(\frac{l\cos\alpha}{v\sin\alpha}\right)^2=-l \quad\Rightarrow$$

$$\frac{l}{\sin\alpha}-\frac{gl^2}{2v^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-l \tag{17}$$

После подстановки выражения (9) получим

$$\frac{l}{\sin\alpha}-\frac{gl^2}{2gl\sin\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-l \quad\Rightarrow\quad \sin^2\alpha-\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\sin^3\alpha=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sin^3\alpha+\frac{3}{2}\sin^2\alpha-\frac{1}{2}=0 \tag{18}$$

Формально мы получили кубическое уравнение относительно величины $z=\sin\alpha$:

$$2z^3+3z^2-1=0\,. \tag{19}$$

Не сложно найти один из корней этого уравнения $z=-1$, что позволяет преобразовать к виду

$$2z^3+3z^2-1=2z^3+2z^2+z^2-1=2z^2(z+1)+(z+1)(z-1)=(z+1)\left(2z^2+z-1\right)=0$$

Корень этого уравнения $z=-1$ не является решением системы уравнений. Так при этом значении синуса угла не выполняется уравнение (9). Тогда оставшиеся корни являются корнями квадратного уравнения

$$2z^2 + z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$
$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = -1 \tag{20}$$

Таким образом, единственным корнем системы уравнений является значение

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Наконец, с помощью выражения (15) находим требуемую начальную скорость

$$V_0 = \sqrt{gl(2 + 3\sin\alpha)} = \sqrt{\frac{7}{2}gl} \tag{22}$$