Задание 10-3 Давление на глубине.

Часть 1.

1.1 Давление описывается известной формулой

$$P = \rho g h \qquad (1)$$

Часть 2.

2.1 Сила взаимодействия определяется законом всемирного тяготения И. Ньютона

$$f_0 = G\frac{m^2}{D^2}. \qquad (2)$$

2.2 Сила взаимодействия между нулевым и k -тым шариками равна

$$f_k = G\frac{m^2}{(kD)^2} = \frac{1}{k^2} f_0. \qquad (3)$$

При $k \to \infty$ сила взаимодействия стремится к нулю $f_\infty = 0$.

2.3 Так как для гравитационных сил справедлив принцип суперпозиции. То сила, действующая на крайний шарик, равна сумме сил, действующих со стороны всех шариков

$$F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = f_0 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} \qquad (4)$$

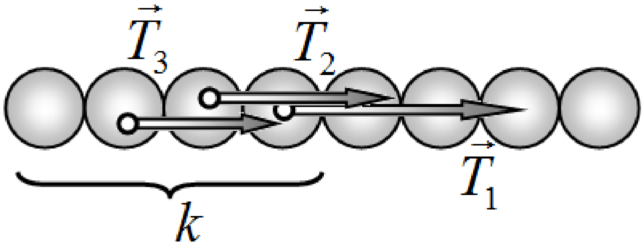
Для численного расчета удобно провести последовательное суммирование по рекуррентной формуле

$$\frac{F_k}{f_0} = \frac{F_{k-1}}{f_0} + \frac{f_k}{f_0}. \qquad (5)$$

При $k \to \infty$ сила взаимодействия стремится к предельному значению

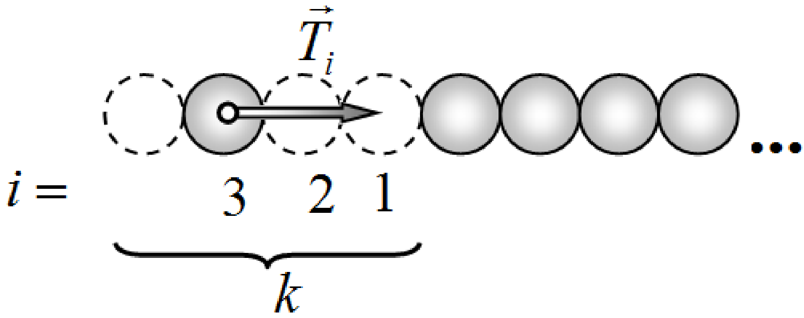
$$F_\infty = f_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = f_0 \frac{\pi^2}{6}. \qquad (6)$$

2.4 Рассмотрим первых k шариков. Так как они находятся в равновесии, то сила упругого взаимодействия между k-тым и предыдущим шариком равна силе гравитационного взаимодействия первых k шариков с полубесконечной цепочкой



$$P_k = T_1 + T_2 + ... T_k \ , \tag{7}$$

Здесь T_i ($i = 1,2...k$) сила притяжения шарика номер i с полубесконечной цепочкой. Нумерацию по i удобно вести в обратном направлении.



Очевидно, что

$$\begin{aligned} &T_1 = F_\infty \\ &T_2 = F_\infty - F_1 \\ &T_3 = F_\infty - F_2 \\ &... \\ &T_i = F_\infty - F_{i-1} \end{aligned} \tag{8}$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 1, в которой добавлена строка для расчета сил T_k.

2.4 Запишем в явном виде выражение для силы P_k при больших k, используя непосредственно закон всемирного тяготения

$$\begin{aligned} \frac{P_k}{f_0} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... \\ + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... \\ + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... \\ ... \end{aligned} \tag{9}$$

Из этой записи следует, при очень больших k данное отношение ведет себя так же, как гармонический ряд, т.е.

$$\frac{P_k}{f_0} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \ . \tag{10}$$

Известно, что сумма такого ряда стремится к бесконечности, причем так же, как $\ln k$, иными словами

$$P_k \approx f_0 \ln k \ . \tag{11}$$

Таблица 1. Результаты расчетов.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞

$\frac{f_k}{f_0}$	1,000	0,250	0,111	0,063	0,040	0,028	0,020	0,016	0,012	0,010	0
$\frac{F_k}{f_0}$	1,000	1,250	1,361	1,424	1,464	1,491	1,512	1,527	1,540	1,550	1,645
$\frac{T_k}{f_0}$	1,645	0,645	0,395	0,284	0,221	0,181	0,154	0,133	0,118	0,105	0
$\frac{P_k}{f_0}$	1,645	2,290	2,685	2,969	3,190	3,371	3,525	3,658	3,775	3,881	$\ln k$