

Задание 10-1 Разминка

Задача 1.1

Ускорение свободного падения на расстоянии r от центра рассчитывается по формуле

$$g = G \frac{m(r)}{r^2}, \quad (1)$$

где $m(r)$ - масса части планеты, находящейся внутри шара радиуса r . Чтобы ускорение свободного падения не зависело от r , необходимо, чтобы масса указанной части планеты удовлетворяла условию

$$m(r) = \frac{g_0}{G} r^2. \quad (2)$$

Запишем выражение для массы части планеты для радиуса $(r + \Delta r)$, где $\Delta r \ll r$

$$m(r + \Delta r) = m(r) + 4\pi r^2 \Delta r \rho. \quad (3)$$

Здесь $4\pi r^2 \Delta r \rho$ - масса части планеты, находящейся внутри шарового слоя радиуса r и малой толщины Δr . С другой стороны, из формулы (2) следует, что

$$m(r + \Delta r) = \frac{g_0}{G} (r + \Delta r)^2 \approx \frac{g_0}{G} r^2 + 2 \frac{g_0}{G} r \Delta r = m(r) + 2 \frac{g_0}{G} r \Delta r \quad (4)$$

Приравняв выражения (3) и (4), получим ответ данной задачи

$$m(r) + 2 \frac{g_0}{G} r \Delta r = m(r) + 4\pi r^2 \Delta r \rho \Rightarrow \rho(r) = \frac{g_0}{2\pi G r} \quad (5)$$

Задача 1.2

Известна формула для сопротивления длинного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1)$$

Но она применима к проводнику постоянного поперечного сечения. В данном случае площадь поперечного сечения проволоки переменна, поэтому для расчета ее сопротивления проволоку следует мысленно разбить на малые участки длиной Δx и просуммировать сопротивления этих участков (отметим, что они соединены последовательно). Итак, сопротивление всей проволоки можно представить в виде суммы

$$R = \sum_k \Delta R_k = \sum_k \rho \frac{\Delta x_k}{\pi r_k^2} = \frac{\rho}{\pi} \sum_k \frac{\Delta x_k}{r_k^2} \quad (2)$$

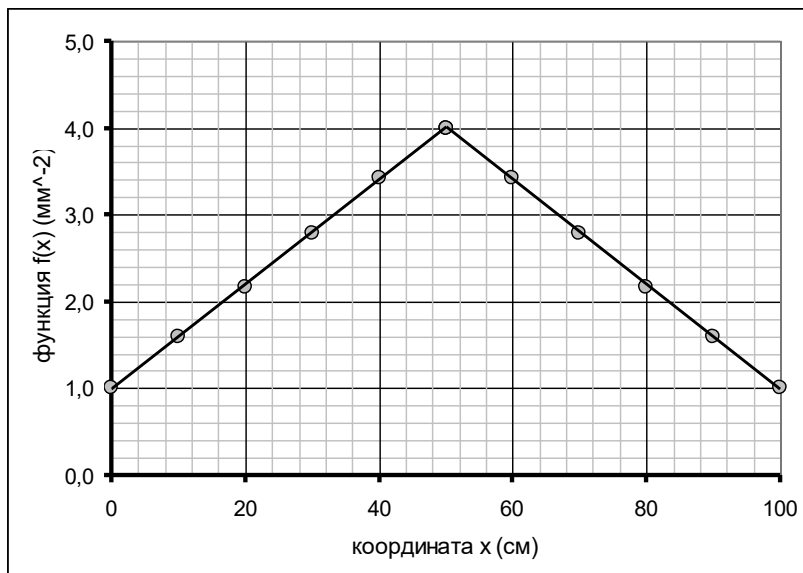
Для вычисления этой суммы можно построить график функции $f(x) = \frac{1}{(r(x))^2}$, тогда площадь

под этим графиком численно будет равна сумме, входящей в формулу (2).

По заданному графику зависимости $r(x)$ найдем значения радиуса в некоторых точках и построим график функции $f(x)$. Снятые с графика значения $r(x_k)$ и рассчитанные значения $f(x_k)$ приведены в таблице, рядом построен график функции $f(x)$.

Таблица.

x , см	r , мм	r^{-2} , мм ⁻²
0	1,00	1,00
10	0,79	1,60
20	0,68	2,16
30	0,60	2,78
40	0,54	3,43
50	0,50	4,00



Проведенные расчеты показывают, что полученная зависимость $f(x)$ состоит из двух симметричных частей, причем каждая из них является линейной. Поэтому не представляет труда вычислить площадь под графиком построенной функции

$$s = 2 \left(\frac{1+4}{2} \right) \cdot 10^6 \text{ м}^{-2} \cdot 0,50 \text{ м} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1} \quad (3)$$

Тогда сопротивление проволоки равно

$$R = \frac{\rho}{\pi} \sum_k \frac{\Delta x_k}{r_k^2} = \frac{\rho}{\pi} s = \frac{1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}}{\pi} 2,5 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1} = 0,095 \text{ Ом}. \quad (4)$$

Задача 1.3

Проводимость газа пропорциональна концентрации n свободных носителей тока (ионов и электронов), т.е.

$$\frac{1}{\rho} = An, \quad (1)$$

где A - некоторая константа.

Ионы в газе появляются вследствие ионизации. т.е. число ионов, появляющихся в единицу времени, пропорционально интенсивности внешнего воздействия (плотности потока ионизирующих частиц)

$$\Delta n_+ = \alpha I \Delta t. \quad (2)$$

Исчезают же ионы вследствие рекомбинации (т.е. встрече двух ионов¹ противоположного знака). Т.к. как концентрации ионов противоположного знака одинаковы, то скорость рекомбинации пропорциональна квадрату концентрации ионов

$$\Delta n_- = \beta n^2 \Delta t. \quad (3)$$

В установившемся режиме скорость ионизации равна скорости рекомбинации. Из этого условия устанавливается связь между интенсивностью потока ионизирующих частиц и концентрацией ионов в газе

$$\alpha I = \beta n^2. \quad (4)$$

При воздействии каждого из источников устанавливаются концентрации, удовлетворяющие условиям

¹ Свободный электрон также будем называть «ионом».

$$\alpha I_1 = \beta n_1^2 \quad (5)$$

$$\alpha I_2 = \beta n_2^2$$

При воздействии двух источников условие стационарности концентраций имеет вид

$$\alpha(I_1 + I_2) = \beta n_s^2. \quad (6)$$

Из этих соотношений следует, что концентрация ионов при воздействии двух источников определяется по «теореме Пифагора»

$$n_s = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}. \quad (7)$$

Наконец, используя соотношение (1), получим формулу, связывающую удельные сопротивления

$$\frac{1}{\rho_s} = \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}. \quad (8)$$

Из которой следует окончательный результат

$$\rho_s = \frac{\rho_1 \rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}}. \quad (9)$$