## Задача 9-2. Полоса препятствий.

### Часть 1. Полоса неподвижна.

1.1 При движении шайбы по шероховатой полосе на нее действует сила трения, модуль которой равен

$$F = \mu mg \,, \tag{1}$$

и направленная противоположно вектору скорости.
В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{2}$$

Модуль ускорения шайбы постоянен и равен

$$a = \mu g \;. \tag{3}$$

Так сила трения направлена вдоль той же прямой, что вектор скорости движение шайбы будет прямолинейным, а так как ускорение постоянно, то движение будет равноускоренным. При минимальной начальной скорости, при которой шайба преодолеет полосу, шайба остановится на противоположном краю полосы. Для расчета значения этой скорости можно воспользоваться известной кинематической формулой

$$S = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_{0\min}^2}{2\mu g} \;. \tag{4}$$

Из которой находим

$$v_{0\min} = \sqrt{2\mu g d} = 4{,}4\,\frac{м}{с} \,. \tag{5}$$

*Этот же результат может быть получен из теоремы о кинетической энергии (изменение энергии равно работе внешних сил):*

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu m g d \tag{4*}$$

**1.2** Так как шайба движется прямолинейно и с постоянным ускорением, то при движении по полосе закон ее движения имеет вид

$$x = v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2 \,. \tag{6}$$

Если начальная скорость шайбы меньше найденной скорости $v_{0\min}$, то в некоторый момент времени $t_1$ шайба остановится. Этот момент времени легко найти с помощью выражения для скорости шайбы при равноускоренном движении

$$v = v_0 - \mu g t \tag{7}$$

Полагая $v = 0$, находим

$$0 = v_0 - \mu g t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{\mu g} \tag{8}$$

Координату шайбы в момент остановки можно определить по формуле

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} \,. \tag{9}$$

Таким образом, в этом случае ( $v < v_{0\min}$ ) закон движения шайбы имеет вид:

$$\begin{cases} x = v_0 t - \dfrac{\mu g}{2} t^2, & t < \dfrac{v_0}{\mu g} \\ x = \dfrac{v_0^2}{2\mu g}, & t < \dfrac{v_0}{\mu g} \end{cases}. \tag{10}$$

Если скорость шайбы превышает $v_{0\min}$, то шайба преодолеет шероховатую полосу. На этой полосе закон движения шайбы также будет иметь вид (6). Но в этом случае после преодоления шероховатой полосы шайба будет иметь скорость, определяемую по формуле

$$S = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2\mu g} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} \tag{11}$$

Шайба выедет с полосы в момент времени $t_1$, который легко найти из закона изменения скорости шайбы (7):

$$v_1 = v_0 - \mu g t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0 - v_1}{\mu g} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d}}{\mu g} \tag{12}$$

*Эту же формулу можно получить как решение квадратного уравнения, следующего из закона движения шайбы (6), только при таком подходе необходимо правильно выбрать меньший корень.*

Далее шайба будет двигаться равномерно со скоростью $v_1$.

Полностью закон движения шайбы описывается выражениями

$$\begin{cases} x = v_0 t - \dfrac{\mu g}{2} t^2, & t < t_1 \\ x = v_1 (t - t_1), & t > t_1 \end{cases}. \tag{13}$$

Где значения величин $t_1$ и $v_1$ определяются формулами (11) и (12).

Шайба достигнет края гладкой полосы в момент времени

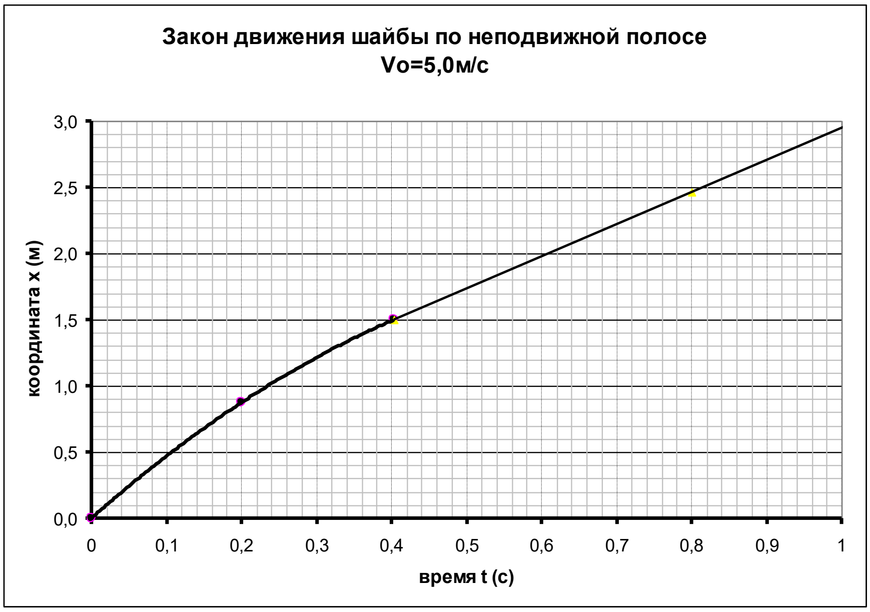
$$t_2 = t_1 + \frac{d}{v_1}. \tag{14}$$

**1.3** При начальной скорости $v_0 = 5{,}0 \frac{м}{с}$ шайба достигнет края шероховатой полосы, поэтому закон движения шайбы описывается формулами (13).

Численный расчет параметров этой зависимости дает следующие значения:

- шайба достигнет края шероховатой полосы в момент времени $t_1 = 0{,}40\,с$;
- скорость шайбы в этот момент времени $v_1 = 2{,}4 \frac{м}{с}$;
- достигнет грая гладкой полосы в момент времени $t_2 = 1{,}0 с$.

График этой зависимости показан на рисунке.



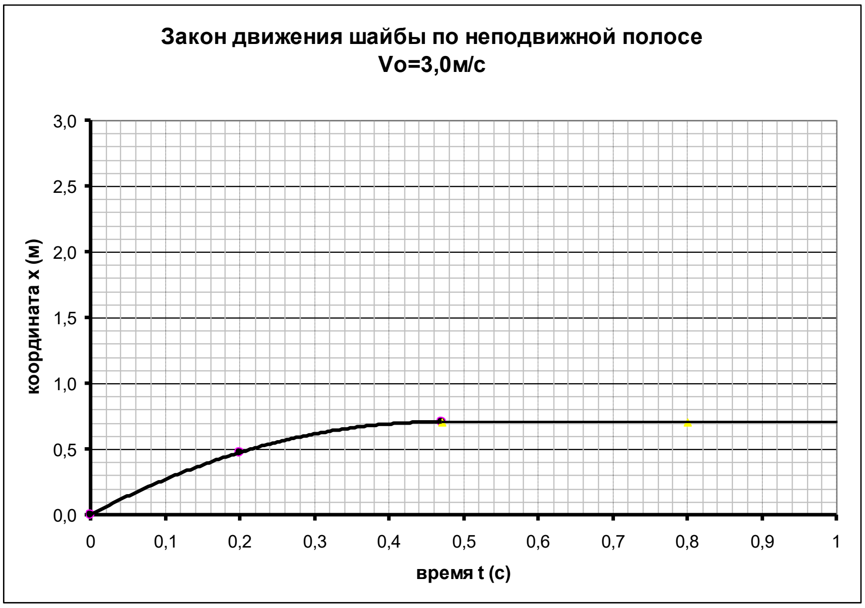
При начальной скорости $v_0 = 3{,}0\frac{м}{с}$

- шайба остановится на шероховатой полосе в точке с координатой $x_1 = 0{,}71м$;

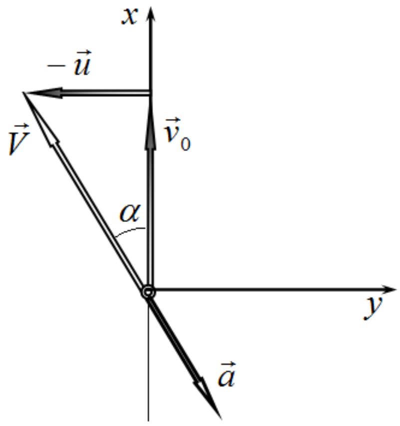
— это произойдет в момент времени $t_1 = 0{,}47с$,

- далее шайба будет покоиться.

График этой зависимости также показан на рисунке.




**Часть 2. Движущаяся полоса.**




2.1 Сила трения направлена в сторону противоположную скорости относительно движущейся полосы. Эта относительная скорость равна

$$\vec{V} = \vec{v}_0 - \vec{u} \; . \tag{15}$$

Этот вектор направлен под углом $\alpha$ к оси $x$. Угол $\alpha$ легко находится из очевидного соотношения

$$tg\,\alpha = \frac{v_0}{u} \, . \tag{16}$$

Вектор ускорения направлен противоположно вектору $\vec{V}$, его модуль, как и ранее, равен $a = \mu g$. Проще всего описать движение шайбы в системе отсчета, связанной с лентой. В этой системе отчета шайба движется по прямой, направленной вдоль вектора $\vec{V}$. Чтобы шайба преодолела шероховатую полосу, для начальной скорости должно выполняться условие

$$\frac{d}{\cos\alpha} = \frac{V^2}{2\mu g} \tag{17}$$

Из этого соотношения следует уравнение для определения минимальной начальной скорости шайбы:

$$\frac{d\sqrt{v_0^2 + u^2}}{v_0} = \frac{v_0^2 + u^2}{2\mu g} \tag{18}$$

Это уравнение приводится к биквадратному уравнению:

$$v_0\sqrt{v_0^2 + u^2} = 2\mu g d \quad \Rightarrow \quad v_0^4 + v_0^2 u^2 - (2\mu g d)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$v_0^2 = \frac{-u^2 + \sqrt{u^4 + 4(2\mu g d)^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad v_{0\min} = \sqrt{\frac{\sqrt{u^4 + 4(2\mu g d)^2} - u^2}{2}} = 4{,}0\frac{м}{с} \tag{19}$$

2.2 В неподвижной системе отсчета движение шайбы является равноускоренным, закон движения шайбы имеет вид

$$\begin{cases} x = v_0 t - \dfrac{\mu g \cos\alpha}{2} t^2 \\ y = \dfrac{\mu g \sin\alpha}{2} t^2 \end{cases} \tag{20}$$

При начальной скорости $v_0 = 5{,}0 \dfrac{м}{с}$ шайба преодолеет шероховатую полосу.

При этом значении начальной скорости угол $\alpha \approx 27°$. $\sin\alpha = 0{,}45 \quad \cos\alpha = 0{,}89$

Шайба достигнет края полосы в момент времени $t_1$, который можно найти из уравнения

$$d = v_0 t_1 - \frac{\mu g \cos\alpha}{2} t_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu g \cos\alpha}{2} t_1^2 - v_0 t_1 + d = 0$$
$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2d\mu g \cos\alpha}}{\mu g \cos\alpha} = 0{,}38с \tag{21}$$

Далее шайба будет двигаться прямолинейно.

В этот момент времени координаты шайбы будет равны

$$\begin{cases} x_1 = d = 1{,}5м \\ y_1 = \dfrac{\mu g \sin\alpha}{2} t_1^2 = 0{,}21м \end{cases}. \tag{22}$$

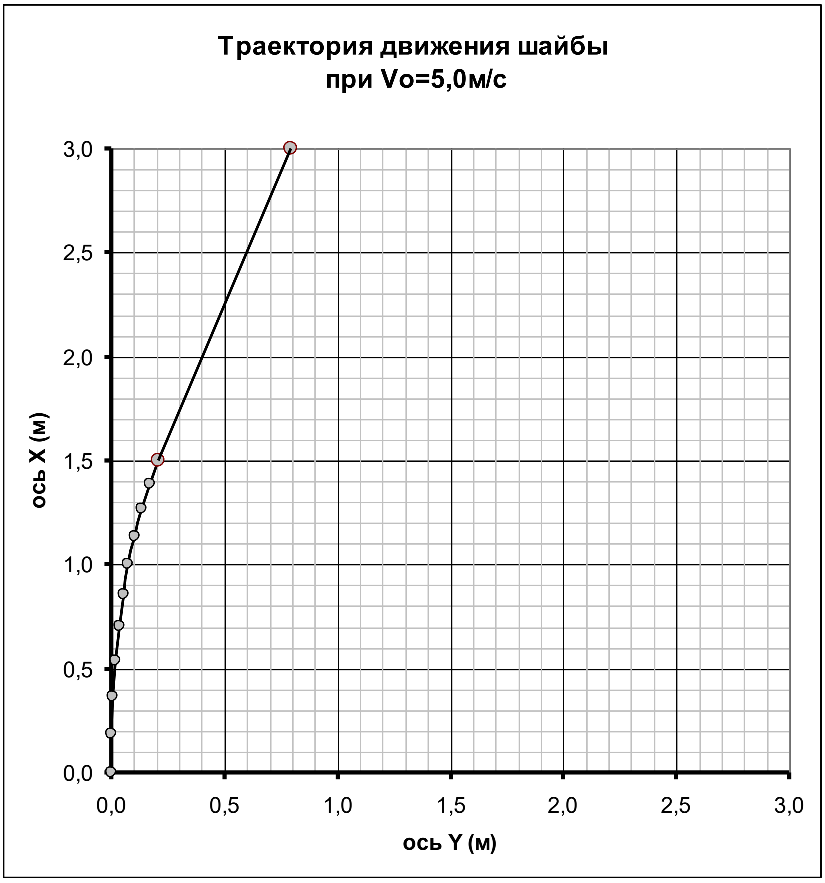
Проекции скорости шайбы на оси координат в момент пересечения полосы будут равны (эти формулы следуют из закона движения (20)):

$$\begin{cases} v_x = v_0 - \mu g \cos\alpha \cdot t_1 = 2{,}8м/с \\ v_y = \mu g \sin\alpha \cdot t_1 = 1{,}1м/с \end{cases}. \tag{23}$$

Далее шайба будет двигаться прямолинейно, закон ее движения будет описываться формулами

$$\begin{cases} x = x_1 + v_x (t - t_1) \\ y = y_1 + v_y (t - t_1) \end{cases}.$$

Траектория шайбы в этом случае показана на рисунке.




При начальной скорости $v_0 = 3{,}0 \dfrac{м}{с}$ шайба не пересечет шероховатую полосу.

В этом случае $\alpha \approx 40°$. $\sin\alpha = 0{,}64 \quad \cos\alpha = 0{,}77$

При движении полосе ее закон движения также описывается функциями (20).

Шайба прекратит скольжение по полосе, когда ее компонента скорости $v_x$ обратится в нуль. Это произойдет в момент времени

$$v_x = v_0 - \mu g \cos\alpha \cdot t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{\mu g \cos\alpha} = 0{,}61c.$$

В этот момент координаты шайбы будут равны

$$\begin{cases} x_1 = v_0 t_1 - \dfrac{\mu g \cos\alpha}{2} t_1^2 = 0{,}92м \\ y_1 = \dfrac{\mu g \sin\alpha}{2} t_1^2 = 0{,}77м \end{cases}$$

Далее шайба будет двигаться вдоль оси $y$ со скоростью ленты.

Траектория шайбы в этом случае показана на рисунке.