Задача 10-1. «Бруски и пружинки»

Часть 1. Два бруска.

1.1 Чтобы сдвинуть с места второй брусок, к нему необходимо приложить силу равную максимальной силе трения покоя, т.е.

$$F_2 = \mu mg\,. \tag{1}$$

Такой силой может быть только силы упругости пружинки. Следовательно, ее необходимо растянуть на величину

$$x = \frac{F_2}{k} = \frac{\mu mg}{k}\,. \tag{2}$$

Очевидно, что на такую же величину необходимо сместить первый брусок. Если к бруску приложить постоянную силу (превышающую силу трения), то он начнет двигаться ускоренно, по мере растяжения пружинки ускорение будет уменьшаться. После того, как сила упругости в сумме с силой трения превысит приложенную силу, брусок будет продолжать двигаться в том же направлении (по инерции) с уменьшающейся скоростью. Когда скорость бруска станет равной нулю, смещение бруска будет максимально. Именно в это момент смещение бруска должно стать равным величине, определяемой формулой (2). Для движения первого бруска запишем уравнение закона сохранения и превращения энергия: работа постоянной силы пойдет на увеличение потенциальной энергии пружины и работу против силы трения:

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu mgx\,. \tag{3}$$

Из этого уравнения находим (с учетом формулы (2)):

$$F = \frac{kx}{2} + \mu mg = \frac{3}{2}\mu mg\,. \tag{4}$$

Отметим, что эта сила меньше, чем суммарная сила трения, действующая на два бруска.

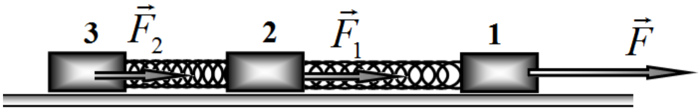
1.2 Все предыдущие рассуждения, касающиеся второго бруска, остаются в силе. Теперь учтем, что в используемом приближении сумма сил, действующих на первый брусок, также должна равняться нулю. Следовательно, к нему должна быть приложена сила, равная сумме сил упругости и силы трения, т. е.

$$F = 2\mu mg\,. \tag{5}$$

Деформация пружины в этом случае также определяется формулой (2).

Часть 2. Три бруска.

Обозначим модули сил упругости пружинок F_1 и F_2. А деформации пружинок x_1, x_2 Нумерация брусков и пружинок показана на рисунке.



2.1 Последний брусок сдвинется, если на него подействует сила упругости $F_2 = \mu mg = f_0$. Сила упругости первой пружинки в этом момент будет равна сумме сил упругости второй пружинки и силы трения, т.е. $F_1 = F_2 + \mu mg = 2f_0$. Приложенная сила в этот момент времени должна превысить F_2 также на величину силы трения, т.е. минимальная сила, необходимая для того, чтобы сдвинуть все бруски, равна

$$F_{\min} = F_1 + \mu mg = 3f_0\,. \tag{6}$$

Этот же результат можно получить и другим, более простым способом. Рассмотрим цепочку целиком. Силы упругости являются внутренними силами для всей цепочки, поэтому они не влияют на ускорение центра масс (которое равно нулю). Поэтому сумма внешних сил также должна быть рана нулю. Поэтому прикладываемая сила должна быть равна суммарной силе трения, действующей на цепочку, т.е. $F_{\min} = 3\mu mg = 3f_0$.

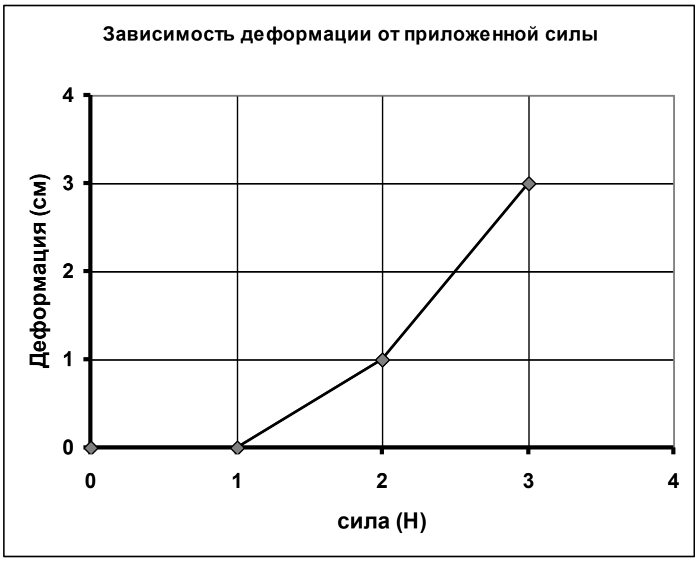
2.2 Рассмотрим движение по этапам. Для удобства все выкладки отразим в таблице.
Величину силы выразим как $F = zf_0$, где z - безразмерный параметр.

Сила F	Сила F_1	Деформация x_1	Сила F_2	Деформация x_2	Суммарная деформация $x = x_1 + x_2$
1 этап: все бруски поятся					
$F \in [0, f_0]$	$F_1 = 0$	$x_1 = 0$	$F_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x = 0$
2 этап: сдвинулся первый брусок, второй и третий покоятся					
$F \in [f_0, 2f_0]$	$F_1 = F - f_0 = = (z-1)f_0$	$x_1 = (z-1)l_0$	$F_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x = (z-1)l_0$
3 этап сдвинулся второй брусок, третий покоится					
$F \in [2f_0, 3f_0]$	$F_1 = (z-1)f_0$	$x_1 = (z-1)l_0$	$F_1 = F - f_0 = = (z-2)f_0$	$x_1 = (z-2)l_0$	$x = (2z-3)l_0$

Таким образом, искомая зависимость представляет собой ломаную линию, состоящую из прямолинейных отрезков.

Значения координат в «узловых» точках (когда начинается движение очередного бруска) показаны в следующей таблице и на графике.

$z = \frac{F}{f_0}$	$\lambda = \frac{x}{l_0}$
0	0
1	0
2	1
3	3



2.3 В рассматриваемую систему (цепочку) энергия поступает благодаря работе внешней силы F . Работу этой силы легко подсчитать с помощью построенного графика. Численно работа равна площади между осью x (на графике вертикальна) и графиком зависимости $F(l)$. Простой расчет дает следующее значение для работы силы:

$$A = f_0 l_0 \left(\frac{1+2}{2} \cdot 1 + \frac{2+3}{2} \cdot 2 \right) = \frac{13}{2} f_0 l_0 . \tag{7}$$

Часть этой энергии пошла на увеличение потенциальной энергии пружин. Деформация первой пружины равна $2l_0$, второй - l_0. Поэтому энергия деформированных пружин равна

$$U = \frac{k}{2}(2l_0)^2 + \frac{k}{2}(l_0)^2 = \frac{5}{2} f_0 l_0 . \quad (8)$$

Часть энергии была израсходована на работу против сил трения (т.е. перешла во внутреннюю, тепловую энергию). Первый брусок сместился на расстояние $3l_0$, второй на расстояние l_0, поэтому количество выделившейся из-за трения теплоты равно

$$Q = 3 f_0 l_0 + f_0 l_0 = 4 f_0 l_0 . \quad (9)$$

Таким образом, уравнение энергетического баланса

$$A = U + Q \quad (10)$$

выполняется.

2.4 Так как внешняя сила заставила все бруски двигаться, то после прекращения колебаний все бруски будут двигаться с одинаковым ускорением равным

$$a = \frac{F - 3\mu mg}{3m} = \frac{2 \cdot 3\mu mg - 3\mu mg}{3m} = \mu g . \quad (11)$$

Для последнего бруска уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$ma = F_2 - \mu mg . \quad (12)$$

Откуда следует, что $F_2 = \mu mg + ma = 2\mu mg$, а удлинение второй пружины

$$x_2 = \frac{F_2}{k} = \frac{2\mu mg}{k} = 2l_0 . \quad (13)$$

Из второго закона Ньютона для центрального бруска

$$ma = F_1 - \mu mg$$

Следует, что сила упругости первой пружины на $2 f_0$ больше силы упругости второй, а ее удлинение на $2l_0$ больше второй, т.е. $x_2 = 4l_0$. В итоге получаем, что суммарное удлинение цепочки в этом случае равно

$$x = x_1 + x_2 = 6l_0 . \quad (14)$$

Часть 3. Цепочка из N брусков.

3.1 Подробное рассмотрение предыдущих частей задачи показывает, что сила упругости последней пружинки равна $f_0 = \mu mg$,а сила упругости каждой следующей возрастает на величину $f_0 = \mu mg$. Соответственно, деформация крайней равна $l_0 = \frac{\mu mg}{k}$, каждой следующей возрастает на величину $l_0 = \frac{\mu mg}{k}$. Следовательно, общая деформация цепочки вычисляется как сумма

$$x = l_0 + 2l_0 + 3l_0 + ... + (N-1)l_0 = \frac{N(N-1)}{2} l_0 . \quad (15)$$

3.2 Из 2 закона Ньютона (см. п. 2.3) следует, что в данном случае деформация каждой цепочки возрастает на величину $2l_0$. Поэтому и общее удлинение будет в 2 раза больше, чем в предыдущем пункте

$$x = 2l_0 + 4l_0 + 6l_0 + ... + 2(N-1)l_0 = N(N-1)l_0 . \quad (16)$$