# Задача 10-3. Неоднородное гравитационное поле.

## Часть 1. Ускорение свободного падения.

1.1 В соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона, ускорение свободного падения на расстоянии $r$ от центра Земли равно

$$g_r = G\frac{M}{r^2} \tag{1}$$

Это выражение можно представить в виде

$$g_r = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{r^2} = g_0\frac{R^2}{r^2}, \tag{2}$$

где $g_0 = G\frac{M}{R^2}$ - ускорение на поверхности Земли, $M$ - масса Земли, $R$ - ее радиус.

1.2 На расстоянии $r + x$ ускорение свободного падения можно описать формулой

$$g_{r+x} = g_0\frac{R^2}{(r+x)^2} = g_0\frac{R^2}{r^2}\left(1+\frac{x}{r}\right)^2 \approx g_r\left(1-2\frac{x}{r}\right), \tag{3}$$

при выводе которой использована приближенная формула (1) из условия задачи. Таким образом, требуемый коэффициент $\alpha$ оказывается равным

$$\alpha = -\frac{2}{r}. \tag{4}$$

1.3 Так как изменение ускорения свободного падения мало, то и искомая высота будет малой по сравнению с радиусом Земли. Поэтому можно воспользоваться приближенной формулой (3), полагая в ней $r = R$:

$$g \approx g_0\left(1-2\frac{h}{R}\right). \tag{5}$$

Из этой формулы следует, что относительное изменение ускорения свободного падения на высоте $h$ равно

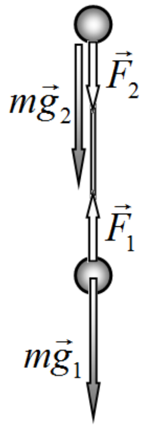
$$\eta = \frac{g-g_0}{g_0} = -2\frac{h}{R}. \tag{6}$$

Из этой формулы находим

$$h = \frac{R}{2}\eta = \frac{6{,}4\cdot 10^6 \, м}{2}\cdot 0{,}010 = 3{,}2\cdot 10^4 \, м. \tag{7}$$

Т.е. ускорение свободного падения уменьшается на 1% на высоте 32 километра.

## Часть 2. Свободное падение.




2.1 Земля притягивает шары, строго говоря, с разной силой, так как они находятся на разных расстояниях от центра Земли: сила тяжести, действующая на нижний шар, больше силы, действующей на верхний шар. Но так как шары соединены стержнем, то ни падают с одинаковым ускорением. Это возможно только в том случае, когда на нижний шар со стороны стержня будет действовать «тормозящая» сила упругости $\vec{F}_1$, направленная вверх, а на верхний шар «разгоняющая» сила $\vec{F}_2$, направленная вниз. Эти простые рассуждения позволяют сделать вывод, что стержень должен быть растянут. Так как масса стержня пренебрежимо мала, то модули этих сил будут равны, т.е. $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = F$. Таким образом, неоднородность гравитационного поля, приводит к появлению сил, стремящихся растянуть стержень.

Для расчета силы упругости в стержне запишем уравнения 2 закона Ньютона для каждого из шаров в проекции на вертикальную ось

$$\begin{aligned} ma &= mg_1 - F \\ ma &= mg_2 + F \end{aligned}. \tag{8}$$

В этих уравнениях $g_1, g_2$ - ускорения свободного падения на расстояниях $\left(r - \frac{l}{2}\right)$ и $\left(r + \frac{l}{2}\right)$, соответственно. Из этой системы уравнений следует, что искомая сила определяется как

$$F = m\frac{g_1 - g_2}{2}. \tag{9}$$

Так как длина стержня мала по сравнению с радиусом Земли, то эти ускорения можно выразить с помощью формулы (3):

$$g_{r \pm \frac{l}{2}} = g_r\left(1 \mp \frac{l}{r}\right). \tag{10}$$

Подстановка этих выражений в формулу (9) дает окончательный результат

$$F = mg_r\frac{l}{r} = mg_0\frac{r^2}{R^2}\frac{l}{r}. \tag{11}$$

2.2 Для численного расчета при $r = R + h$ можно заметить, что не высокая точность исходных данных (две значащие цифры) позволяет пренебречь высотой $h$ по сравнению с радиусом Земли (т.к. на этой высоте ускорение свободного падения изменяется менее чем на 1%), поэтому

$$\begin{aligned} F &= mg_0\frac{r^2}{R^2}\frac{l}{r} = mg_0\frac{R+h}{R}\frac{l}{R} = mg_0\left(1 + \frac{h}{R}\right)\frac{l}{R} \approx mg_0\frac{l}{R} = \\ &= 10кг \cdot 9{,}8\frac{м}{с^2} \cdot \frac{10м}{6{,}4 \cdot 10^6 м} = 1{,}5 \cdot 10^{-4} Н \end{aligned}. \tag{12}$$

2.3 Как и следовало ожидать, сила, растягивающая стержень в процессе его падения, крайне мала. Однако, следует ее сравнить с силой гравитационного взаимодействия шаров

$$F_G = G\frac{m^2}{l^2}. \tag{13}$$

Их отношение выражается следующим образом

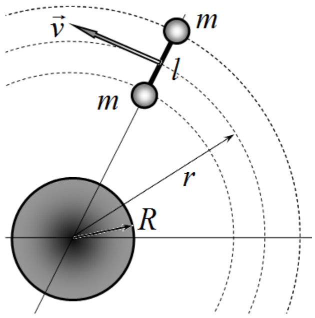
$$\frac{F}{F_G} = \frac{mg_0\frac{l}{R}}{G\frac{m^2}{l^2}} = \frac{G\frac{M}{R^2}\frac{l}{R}}{G\frac{m}{l^2}} = \frac{M}{m}\frac{l^3}{R^3} = \frac{R^3}{b^3}\frac{l^3}{R^3} = \left(\frac{l}{b}\right)^3. \tag{14}$$

При выводе учтено, что отношение масс шаров при одинаковой плотности равно отношению кубов их радиусов $\frac{M}{m} = \frac{R^3}{b^3}$. При заданных численных параметрах это отношение равно

$$\frac{F}{F_G} = \left(\frac{l}{b}\right)^3 = \left(\frac{10}{0{,}10}\right)^3 = 1{,}0 \cdot 10^6. \tag{15}$$

Таким образом, найденная «разрывающая сила» в миллион (!) раз превышает силу гравитационного притяжения.

**Часть 3. Орбитальная станция.**




Решение этой части полностью аналогично решению предыдущей. Только необходимо учесть, что в данном случае ускорения, с которыми движутся отсеки станции, являются центростремительными, зависящими от радиусов их орбит. При описанном характере движения одинаковыми являются угловые скорости движения отсеков. Поэтому уравнения 2 закона Ньютона в проекции на радиальное направление для каждого из отсеков имеют вид

$$m\omega^2\left(r-\frac{l}{2}\right)=mg_1-F$$

$$m\omega^2\left(r+\frac{l}{2}\right)=mg_2+F \qquad (16)$$

Здесь, как и ранее $g_1, g_2$, - ускорения свободного падения на расстояниях $\left(r-\frac{l}{2}\right)$ и $\left(r+\frac{l}{2}\right)$ от центра Земли:

$$g_1=g_r\left(1+\frac{l}{r}\right),\quad g_2=g_r\left(1-\frac{l}{r}\right) \qquad (17)$$

Вычитая из второго уравнения системы (16) первое, получим

$$m\omega^2 l=mg_2-mg_1+2F\ .$$

или

$$F=\frac{m\omega^2 l}{2}+\frac{mg_1-mg_2}{2}\ . \qquad (18)$$

Угловую скорость движения станции можно определить из уравнения Ньютона для центра масс станции

$$2m\omega^2 r=mg_1+mg_2\ . \qquad (19)$$

Из которого следует

$$\omega^2=\frac{g_1+g_2}{2}\frac{1}{r}\ . \qquad (20)$$

Подстановка выражений для ускорений и угловой скорости в формулу (18) дает:

$$F=\frac{m\omega^2 l}{2}+\frac{mg_1-mg_2}{2}=m\left(\frac{g_1+g_2}{2}\frac{l}{r}+\frac{g_1-g_2}{2}\right)=m\left(g_r\frac{l}{r}+g_r\frac{l}{r}\right)=2mg_0\frac{r^2}{R^2}\frac{l}{r}\ . \qquad (21)$$

Заметим, что полученный результат в два раза превышает полученный ранее в формуле (11). Это связано с тем, что помимо различия в силах тяжести, существует различие в ускорениях связанных тел[1].

[1] Это же различие легко объяснить, если перейти во вращающуюся неинерциальную систему отсчета, связанной с самой станцией. В этой системе отсчета, на отсеки действуют различные центробежные силы, помимо сил гравитационных.