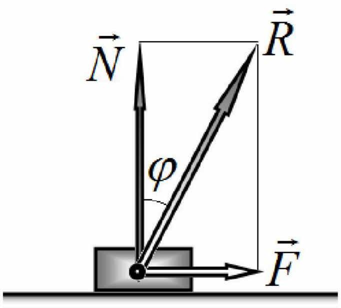
Решения задач. 11 класс

Задача 11.1 Алгебра и геометрия на наклонной плоскости.

Часть 1. Неподвижная наклонная плоскость.



1.1 В соответствии с законом кулона – Амонтона (для силы трения) при скольжении тела, модуль силы трения связан с силой нормальной реакции простым соотношением

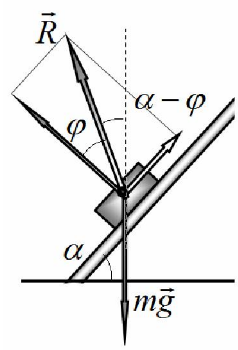
$$F = \mu N . \qquad (1)$$

Как следует из рисунка справедливо соотношение:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F}{N} = \mu \qquad (2)$$

1.2 Модуль силы реакции выражается через модуль силы нормальной реакции следующим образом

$$R = \frac{N}{\cos\varphi} . \qquad (3)$$



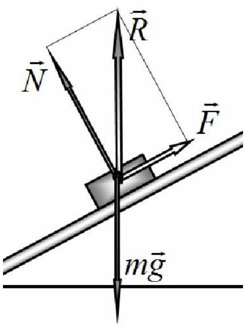
1.3-14 Так как на брусок действуют только две силы $\vec{R}$ и $m\vec{g}$, то для соскальзывания бруска необходимо, что бы их сумма имела горизонтальную составляющую, направленную в сторону спуска по наклонной плоскости. А это возможно только при

$$\alpha > \varphi \qquad (4)$$

Традиционное решение этой задачи: проекция силы тяжести на наклонную плоскость должна превысить силу трения:

$mg\sin\alpha > \mu N = \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha > \mu$, что равносильно условию (4).

1.4 В предельном случае (начала скольжения) сила реакции направлена вертикально и по модулю равна силе тяжести.



1.5 Известная формула для ускорения бруска на наклонной плоскости

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad (5)$$

может быть получена с помощью рисунка к п.1.3:

Горизонтальная составляющая ускорения бруска равна

$$a_{гор.} = \frac{R\sin(\alpha - \varphi)}{m} \qquad (6)$$

Кроме того, проекции силы тяжести и силы реакции на нормаль к наклонной плоскости равны (т.к. ускорение бруска направлено вдоль наклонной плоскости):

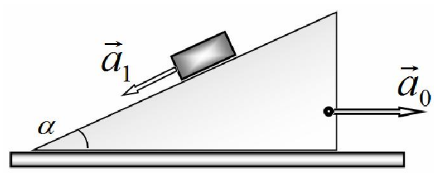
$$R\cos\varphi = mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\varphi}$$

Тогда ускорение бруска равно

$$a = \frac{a_{гор.}}{\cos\alpha} = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\varphi}\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{m\cos\alpha} = g\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}, \qquad (7)$$

что равносильно формуле (5).

2. Брусок на ускоренно движущейся призме



2.1 Представим полное ускорение бруска в виде суммы векторов ускорения призмы $\vec{a}_0$ и ускорения бруска относительно призмы $\vec{a}_1$:

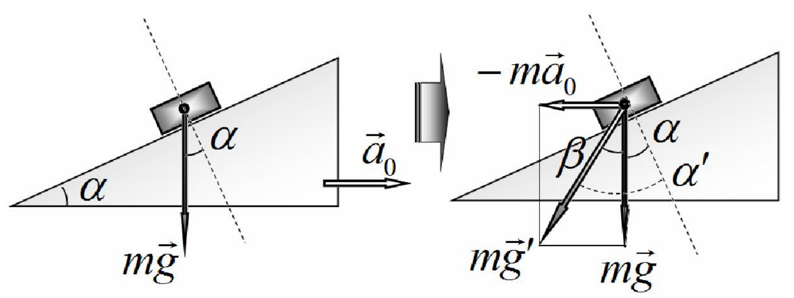
$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \quad (8)$$

Уравнение 2 закона Ньютона (в векторной форме) для призмы в этом случае имеет вид:

$$m(\vec{a}_0 + \vec{a}_1) = m\vec{g} + \vec{R} \quad (9)$$

в котором $\vec{R}$ - введенная ранее сила реакции, действующая на брусок со стороны призмы. Важно, что эта сила реакции определяется силой тяжести. Перепишем уравнение (9) в виде

$$m\vec{a}_1 = m(\vec{g} - \vec{a}_0) + \vec{R} \quad (10)$$



Это уравнение можно толковать, как уравнение движения бруска на наклонной плоскости, если ускорение свободного падения равно

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0. \quad (11)$$

Как следует из рисунка, вектор $\vec{g}'$ отклонен от вектора $\vec{g}$ на угол

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{a_0}{g}. \quad (12)$$

Отметим, что проведенные рассуждения равносильны переходу в неинерциальную систему отсчета, связанную с призмой. В этой системе отсчета «появляется» сила инерции…, но это выходит за рамки школьной программы.

2.2 Угол наклона плоскости к горизонту α также равен углу между вектором ускорения свободного падения $\vec{g}$ и нормалью к плоскости. Поэтому изменение направления вектора ускорения свободного падения (переход от $\vec{g}$ к $\vec{g}'$) равносильно изменению угла между нормалью к наклонной плоскости и вектором эффективного ускорения свободного падения, т.е. к изменению угла наклона плоскости. Также из рисунка легко заметить, что этот новый угол α' оказывается равным

$$\alpha' = \alpha + \beta \quad (13)$$

2.3 Условие начала скольжения по наклонной плоскости было сформулировано ранее (неравенство (4)), поэтому остается только переписать его:

$$\alpha' > \varphi \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta > \varphi \quad (14)$$

В заключение отметим, что от этого «углового» условия можно перейти и к привычным формулировкам:

$$\beta > \varphi - \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0}{g} > \operatorname{tg}(\alpha - \operatorname{arctg}\mu)$$

Это неравенство без труда (но при знании тригонометрических формул) может быть преобразовано к привычному виду.