Задача 2. Негармонические колебания.

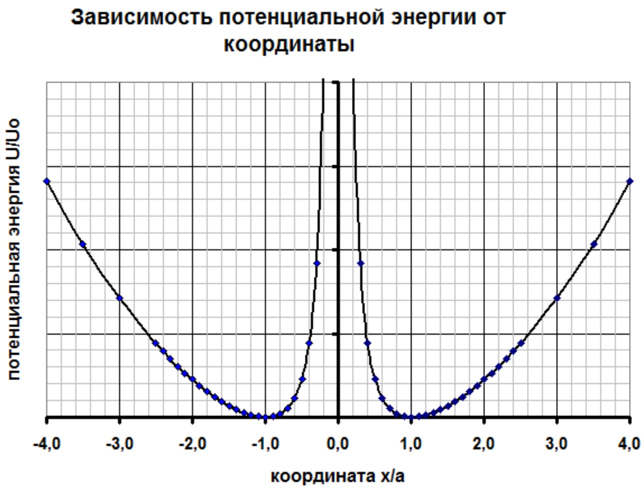
1.1 Для построения схематического графика потенциальной функции (зависимости потенциальной энергии от координаты)

$$U(x) = ka^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2\right) \qquad (1)$$

Следует отметить ее очевидные свойства:

- функция является четной, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат;
- функция обращается в ноль при $x = a$;
- при $x \to 0$ потенциальная энергия стремится к бесконечности, т.е. в нуле существует бесконечный потенциальный барьер;
- при $x \to \infty$ функция приближается к квадратичной зависимости, ее график приближается к параболе.

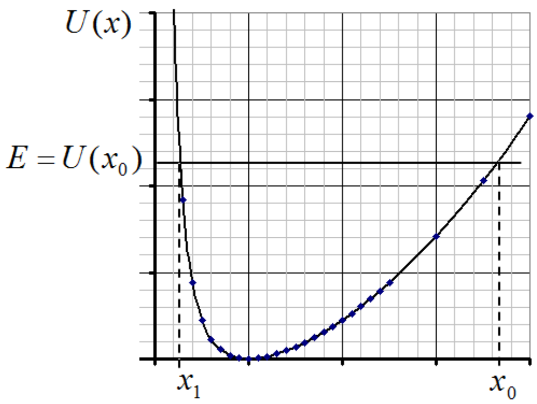
Этих свойств вполне достаточно, что бы построить схематический график зависимости $U(x)$, который показан на рисунке.



1.2 Потенциальная кривая имеет точку минимума, что соответствует наличию положения устойчивого равновесия. Поэтому точка будет совершать колебательное движение. Так как зависимость потенциальной энергии от координаты не является квадратичной. То колебания не будут гармоническими.

1.3 Как было отмечено вблизи $x = 0$ потенциальная энергия стремиться к бесконечности, поэтому материальная точка не сможет преодолеть этот барьер. Поэтому в дальнейшем достаточно рассматривать только область $x > 0$. Для качественного анализа характера движения можно воспользоваться уравнением закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = U(x_0) \qquad (2)$$



В котором полная энергия точки определяется начальным условием $E = U(x_0)$. Точки возврата, в которых скорость обращается в нуль задаются уравнением:

$$U(x) = U(x_0) \qquad (3)$$

Это уравнение иллюстрируется рисунком, на котором отмечен уровень полной энергии и точки x_0, x_1, в пределах которых происходит движение точки. Для определения пределов движения необходимо решить уравнение (причем надо выбирать только положительные корни)

$$ka^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-2\right)=ka^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{a^2}{x_0^2}-2\right) \qquad (4)$$

Можно решить это уравнение стандартными методами (оно сводится к биквадратному уравнению). Но проще заметить, что уравнение симметрично относительно замены $\frac{x}{a}\to\frac{a}{x}$.

Поэтому второй положительный корень этого уравнения $x_1=\frac{a}{x_0}$.

Таким образом, материальная точка будет двигаться внутри интервала

$$x\in\left[x_0,\frac{a}{x_0}\right]. \qquad (5)$$

1.4 Малые колебания точки происходят вблизи положения равновесия $x=a$. Поэтому представим координату точки в виде

$$x=(a+y) \qquad (6)$$

Где отклонение от положения равновесия $y<<a$. Для упрощения потенциальной функции преобразуем ее к виду

$$U(x)=ka^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-2\right)=ka^2\left(\frac{(a+y)^2}{a^2}+\frac{a^2}{(a+y)^2}-2\right)=$$

$$=ka^2\frac{(a+y)^4+a^4-2(a+y)^2a^2}{(a+y)^2a^2}=ka^2\frac{\left((a+y)^2-a^2\right)^2}{(a+y)^2a^2}=ka^2\frac{\left(2ay+y^2\right)^2}{(a+y)^2a^2}$$

Теперь следует пренебречь всеми слагаемыми, имеющими больший порядок, чем y^2:

$$U(x)=ka^2\frac{\left(2ay+y^2\right)^2}{(a+y)^2a^2}\approx ka^2\frac{(2ay)^2}{(a)^2a^2}=4ky^2. \qquad (7)$$

В этом приближении уравнение закона сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{mv^2}{2}+4ky^2=4ky_0^2, \qquad (8)$$

которое является уравнением гармонических колебаний с круговой частотой $\omega^2=\frac{8k}{m}$.

Следовательно, период малых колебаний определяется по формуле

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{8k}}=\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}. \qquad (9)$$

1.5 При больших амплитудах колебаний можно приближенно считать, что

$$U(x) = kx^2 \qquad (10)$$

При $x > 0$ и обращается в бесконечность при $x = 0$. График этой приближенной функции показан на рисунке. Движение в этом случае можно представить как гармонические колебания при $x > 0$ и абсолютно упругое отражение в начале координат. Поэтому период таких колебаний будет равен половине периода гармонических колебаний с потенциальной энергией, описываемой функцией (10):

$$T = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\,. \qquad (11)$$

Этот период совпадает с периодом малых колебаний.

1.6 Воспользуемся «подсказкой» и получим уравнение для квадрата координаты частицы $z = x^2$. Скорость изменения этой величины равна

$$V_z = (z)' = 2xx' = 2xv \qquad (12)$$

Тогда скорость частицы равна:

$$v = \frac{V_z}{2x}\,. \qquad (13)$$

Выразим потенциальную энергию через параметр z:

$$U(x) = ka^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2\right) = ka^2\left(\frac{z}{a^2} + \frac{a^2}{z} - 2\right). \qquad (14)$$

Подставим эти выражение в уравнения закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = U(x_0) \;\Rightarrow\; \frac{m}{2}\left(\frac{V_z}{2x}\right)^2 + k\frac{(z-a^2)^2}{z} = k\frac{(z_0-a^2)^2}{z_0}\,. \qquad (15)$$

Учитывая, что $x^2 = z$, получим

$$\frac{m}{2}V_z^2 + 4k(z-a^2)^2 = 4k\frac{(z_0-a^2)^2}{z_0}z \qquad (16)$$

В этом уравнении можно выделить полный квадрат относительно переменной z и привести его к виду

$$\frac{m}{2}V_z^2 + 4k(z-b)^2 = E\,. \qquad (17)$$

А это уравнение также является уравнением гармонических колебаний, для которых период не зависит от амплитуды. Следовательно, переменная z (поэтому и $x = \sqrt{z}$) изменяется периодически, с постоянным периодом, не зависящим от амплитуды колебаний.

1.7 Для того, чтобы получить зависимость координаты от времени, необходимо провести преобразования, анонсированные в предыдущем пункте задачи. Однако, можно пойти и более простым логическим путем:

- переменная z изменяется по гармоническому закону, поэтому отклонения от средней точки в обе стороны должны быть одинаковы;

- координата x изменяется в пределах $\left[x_0, \frac{a^2}{x_0}\right]$, поэтому переменная $z = x^2$ лежит в интервале $\left[x_0^2, \frac{a^4}{x_0^2}\right]$;

- средняя точка для переменной z имеет значение $\bar{z} = \frac{1}{2}\left(x_0^2 + \frac{a^4}{x_0^2}\right)$;

- амплитуда изменения переменной z равна $A = x_0^2 - \bar{z} = \frac{1}{2}\left(x_0^2 - \frac{a^4}{x_0^2}\right)$.

Поэтому закон изменения переменной z должен иметь вид (период колебаний задается формулой (9)):

$$z = \bar{z} + A\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(x_0^2 + \frac{a^4}{x_0^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x_0^2 - \frac{a^4}{x_0^2}\right)\cos\omega t\,. \qquad (18)$$

Наконец, возвращаясь к координате точки. Получим закон ее изменения:

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x_0^2 + \frac{a^4}{x_0^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x_0^2 - \frac{a^4}{x_0^2}\right)\cos\omega t} \qquad (19)$$

Подставляя заданное начальное значение $x_0 = 3a$, получим

$$x(t) = \frac{a}{3}\sqrt{41 + 40\cos\omega t} \qquad (20)$$

График этой функции показан на рисунке.