Задача 9-2. Наклонная плоскость

Основная сложность анализа движения тел в этой системе заключается в том, что заранее не известно направление векторов сил трения. Понятно, что сила трения направлена в сторону, противоположную вектору относительной скорости трущихся тел. Кроме того, следует учесть, что трение в данной системе может быть, как трением скольжения, так и трением покоя. Поэтому наиболее разумным путем анализа различных вариантов движения является следующий: сделать предположение о направлении движения тел, найти соответствующие значения ускорений и на основании полученных формул, сформулировать условия, при которых реализуется рассматриваемый режим.

Прежде всего, заметим, что при заданных численных значениях выполняются условия:

а) $\mu_0 > tg\,\alpha$, поэтому ящик не будет скользить по поддону, если последний покоится, или скользит вниз;

б) $\mu_1 < tg\,\alpha$, поддон может скользить по наклонной плоскости под действием силы тяжести.

Это наблюдение позволяет упростить анализ возможных вариантов движения. Будем их рассматривать последовательно по мере увеличения массы повешенного груза M.

Сделаем еще несколько общих замечаний, применимых ко всем режимам движения.

Как известно, сила трения скольжения (она же максимальная сила трения покоя) определяется законом Кулона – Амонтона:

$$F_{тр} = \mu N\,, \tag{1}$$

Где N - сила нормальной реакции. В нашем случае наклонная плоскость всегда неподвижна, поэтому векторы ускорений всегда направлены параллельно наклонной плоскости. Поэтому сила нормальной реакции, действующая на любое тело, движущееся по наклонной плоскости, равна

$$N = mg\cos\alpha\,. \tag{2}$$

Поэтому модуль силы трения скольжения (т.е. когда тело движется) равен

$$F_{тр} = \mu mg\cos\alpha \tag{3}$$

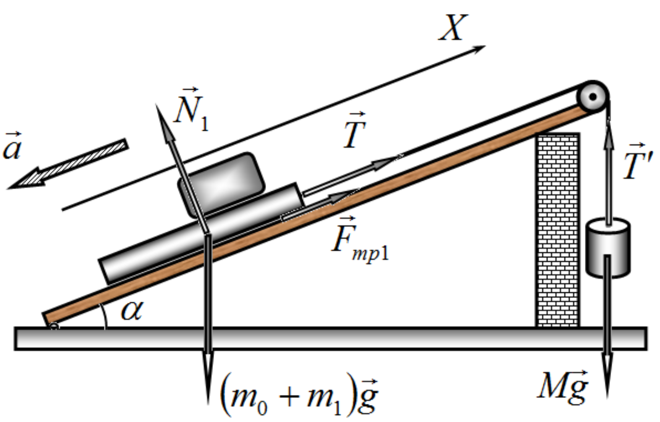
А модуль силы трения покоя (когда тело не движется по поверхности) удовлетворяет условию:

$$\left|F_{тр\ покоя}\right| \le \mu mg\cos\alpha\,. \tag{4}$$

1. Приступим теперь к анализу возможных режимов движения, последовательно мысленно увеличивая массы повешенного груза,

Режим 1. Поддон скользит вниз по наклонной плоскости.

Предположим, что поддон скользит вниз по наклонной плоскости, а ящик не движется по поддону (т.е. ящик и поддон движутся как единое целое). В этом случае силы, действующие на поддон с ящиком, и силы, действующие на подвешенный груз, направлены так, как показано на рисунке.



Тогда на основании 2 закона Ньютона можно записать уравнения для описания движения поддона с полезным грузом в проекции на ось X :

$$(m_1+m_0)a = T-(m_1+m_0)g\sin\alpha+\mu_1(m_1+m_0)g\cos\alpha . \qquad (5)$$

здесь T - модуль силы натяжения веревки, $\mu_1(m_1+m_0)g\cos\alpha$ - модуль силы трения, действующей на поддон.

Для подвешенного груза аналогичное уравнение имеет вид:

$$Ma = Mg - T . \qquad (6)$$

Заметим, что модуль силы натяжения веревки действующий на этот груз равен модулю силы натяжения, действующей на поддон, потому, что: веревка и блок невесомы, сила трения в оси блока отсутствуют. Модули ускорений равны потому, что веревка нерастяжима.

Из уравнений (5) - (6) находим, что в этом режиме проекция ускорения поддона и полезного груза равна

$$a = \frac{M-(m_1+m_0)(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{(m_1+m_0+M)}g . \qquad (7)$$

Это выражение будет справедливо, если эта проекция отрицательна (т.е. действительно поддон скользит вниз по наклонной плоскости). Следовательно, этот режим реализуется при

$$\begin{gathered} a<0 \quad \Rightarrow \\ M<(m_1+m_0)(\sin\alpha-\mu_1\cos\alpha)=8{,}2\,кг \end{gathered} \qquad (8)$$

Покажем, что в этом режиме m_0 действительно будет покоиться относительно поддона.

Если этот груз движется вниз вместе с поддоном с некоторым ускорением a, то для него справедливо уравнение (в проекции на наклонную плоскость «вниз»)

$$m_0 a = m_0 g\sin\alpha - F_{тр0} . \qquad (9)$$

Из этого уравнения следует, что сила, трения действующая на груз должна быть равна

$$F_{тр0} = m_0 g\sin\alpha - m_0 a \qquad (10)$$

В рассмотренном режиме ускорение изменяется от нуля до максимального значения $a_{\max} = g(\sin\alpha-\mu_1\cos\alpha)$. Следовательно, сила трения должна изменяться от $F_{тр0} = m_0 g\sin\alpha$ до $F_{тр0} = \mu_1 m_0 g\cos\alpha$. Во всем этом диапазоне сила трения меньше, чем максимальная сила трения покоя $F_{тр\max} = \mu_0 m_0 g\cos\alpha$, следовательно, груз скользить по поддону не будет.

Отметим, что для такого скольжения поддон надо тянуть вниз с некоторой заметной силой (вычисление которой не требуется по условию задачи).

Если масса повешенного груза превысит значение, задаваемое условием (8), то система перейдет в следующий режим 2.

Режим 2. Поддон с грузом покоится.

Верхнюю границу этого режима найдем, как нижнюю границу режима 3.

Режим 3. Поддон движется вверх по наклонной плоскости, ящик движется вместе с ним (т.е. не проскальзывает по поддону).

В этом режиме изменится на противоположное направление силы трения, действующей на поддон со стороны наклонной плоскости. Поэтому в уравнении (5) достаточно изменить знак перед слагаемым, описывающим проекцию силы трения, а уравнение для движения подвешенного груза останется неизменным. Таким образом, система уравнений, описывающих движение в данном режиме, имеет вид

$$\begin{cases}(m_1+m_0)a = T-(m_1+m_0)g\sin\alpha-\mu_1(m_1+m_0)g\cos\alpha \\ Ma = Mg-T\end{cases}. \qquad (11)$$

Из этих уравнений следует, что ускорение поддона (и равное ему ускорения ящика) описывается формулой

$$a=\frac{M-(m_1+m_0)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{(m_1+m_0+M)}g\,. \qquad (12)$$

Эта формула справедлива при $a>0$, или при

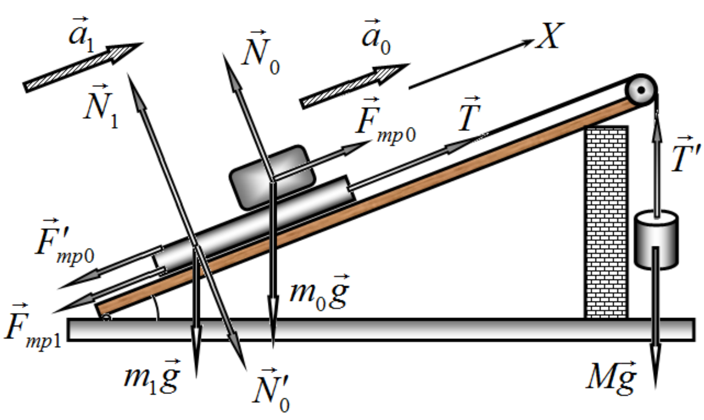
$$M>(m_1+m_0)(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)=16{,}8\,кг\,. \qquad (13)$$

Если масса подвешенного груза лежит в интервале между найденными граничными значениями (8) и (13) поддон с ящиком будут покоиться.

При увеличении массы подвешенного груза M ускорение поддона с ящиком будет возрастать. Однако, силой, которая непосредственно «разгоняет» ящик является сила трения, действующая на него со стороны поддона. Поэтому при некотором ускорении поддона, силы трения будет недостаточно, что сообщить такое же ускорение ящику, поэтому ящик начнет скользить по поддону. Поэтому появляется следующий режим движения.

Режим 4. Поддон движется вверх, ящик проскальзывает по поддону.

На рисунке показаны направления сил, действующих на движущиеся тела в рассматриваемой системе. Уравнение, описывающее движение ящика при его проскальзывании по поддону, записывается в виде



$$m_0a_0=\mu_0m_0g\cos\alpha-m_0g\sin\alpha\,, \qquad (14)$$

где $\mu_0m_0g\cos\alpha$ - модуль силы трения, действующей между ящиком и поддоном. Из уравнения (14) следует, что ускорения ящика в этом режиме остается постоянным и равным

$$a_0 = (\mu_0 \cos\alpha - \sin\alpha) g = 0{,}63 \frac{м}{с^2}, \tag{14}$$

Уравнение движения поддона в проекции на ось X в этом режиме имеет вид:

$$m_1 a_1 = T - m_1 g \sin\alpha - \mu_0 m_0 g \cos\alpha - \mu_1 (m_0 + m_1) g \cos\alpha . \tag{15}$$

Добавляя уравнение движения подвешенного груза

$$M a_1 = Mg - T \tag{16}$$

И решая полученную систему уравнений, получим формулу для ускорения поддона (и подвешенного груза):

$$a_1 = \frac{M - m_1 \sin\alpha - \mu_0 m_0 \cos\alpha - \mu_1 (m_0 + m_1)\cos\alpha}{m_1 + M} g . \tag{17}$$

Эта формула для ускорения поддона справедлива, если это ускорение превышает максимально возможное ускорение ящика, задаваемое формулой (14), т.е. при

$$\frac{M - m_1 \sin\alpha - \mu_0 m_0 \cos\alpha - \mu_1 (m_0 + m_1)\cos\alpha}{m_1 + M} g > (\mu_0 \cos\alpha - \sin\alpha) g . \tag{18}$$

Это неравенство будет выполняться, если масса подвешенного груза превысит значение

$$. \qquad M > \frac{(\mu_0 + \mu_1)(m_0 + m_1)\cos\alpha}{1 - \mu_0 \cos\alpha + \sin\alpha} = 19{,}6\ кг \tag{19}$$

Подведем итог: ускорение поддона описывается функцией:

$$a_1 = \begin{cases} \dfrac{M - (m_1 + m_0)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(m_1 + m_0 + M)} g = \dfrac{M - 8{,}2}{25 + M} g; \quad при\ M < 8{,}2кг \\ 0; \qquad при \quad 8{,}2кг < M < 16{,}8кг \\ \dfrac{M - (m_1 + m_0)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{(m_1 + m_0 + M)} g = \dfrac{M - 16{,}8}{25 + M} g \quad при\ 16{,}8кг < M < 19{,}6кг \\ \dfrac{M - m_1 \sin\alpha - \mu_0 m_0 \cos\alpha - \mu_1 (m_0 + m_1)\cos\alpha}{m_1 + M} g = \dfrac{M - 18{,}1}{5 + M} g \quad при\ M > 19{,}6кг \end{cases} \tag{20}$$

Ускорение ящика задается функцией

$$a_0 = \begin{cases} a_1 \quad при\, M < 19{,}6\ кг \\ (\mu_0 \cos\alpha - \sin\alpha) g = 0{,}63 \dfrac{м}{с^2} \quad при\, M > 19{,}6кг \end{cases} \tag{21}$$

2. Графики полученных зависимостей показаны на рисунке.
Пунктиром обозначен участок графика зависимости ускорения ящика, когда оно отличается от ускорения поддона.

3. Понятно, что рациональным выбором массы подвешенного груза является участок от точки 3 до точки 4 (в режиме 3 по нашей терминологии), когда ящик поднимается и не скользит по поддону. По-видимому, не следует затрачивать лишних усилий и заставлять ящик двигаться с ускорением, поэтому наиболее разумно выбрать значение массы, соответствующее начальной точке этого участка, т.е.

$$M = 16{,}8\,кг\,, \tag{22}$$

Точнее, чуть больше!

4. КПД будет максимальным при указном значении массы $M = 16{,}8\,кг$. При меньшей массе ящик не будет подниматься, а при большей – часть энергии опускающегося груза будет преобразовываться в кинетическую энергия движения ящика и поддона.

Если подвешенный груз опуститься на некоторое расстояние Δh, то ящик поднимется на высоту $\Delta h_0 = \Delta h \sin\alpha$. Поэтому КПД установки в этом случае будет равен

$$\eta = \frac{m_0 g \Delta h_0}{M g \Delta h} = \frac{m_0 \sin\alpha}{M} \approx 60\%. \tag{23}$$

Очевидно, что данная величина заметно меньше 1 по двум причинам: необходимость преодоления сил трения и «бесполезный» подъем поддона.