Задание 10-3. Скатывание без проскальзывания.

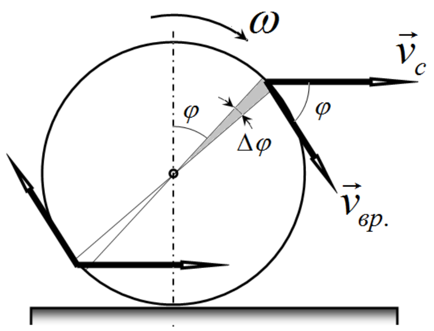
Часть 1. Динамика вращательного движения.

1.1 Так как все точки трубки находятся на одном расстоянии от оси вращения, то модули их скоростей одинаковы и равны

$$v = \omega R. \tag{1}$$

Поэтому кинетическая энергия вращающейся трубки равна

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}. \tag{2}$$



1.2 Представим движение трубки как сумму поступательного прямолинейного движения ее центра и его вращения вокруг центра. В этом случае разные точки трубки движутся с разными скоростями относительно поверхности. Мысленно разобьем трубку на равные малые участки (полоски вдоль длины трубки), видимые из центра обруча под малым углом $\Delta\varphi$. Рассмотрим один из таких участков, положение которого задается углом φ от вертикали. Полная скорость этого участка складывается из скорости движения центра $\vec{v}_c$ и скорости вращательного движения $\vec{v}_{вр.}$ относительно центра колеса ($|\vec{v}_{вр.}| = \omega R$). Используя теорему косинусов, легко показать, что квадрат вектора полной скорости выделенного участка равен

$$v^2 = v_c^2 + v_{вр.}^2 + 2v_c v_{вр.}\cos\varphi. \tag{3}$$

Чтобы найти кинетическую энергию всей трубки необходимо просуммировать энергии всех ее участков:

$$E = \sum_i \frac{\Delta m}{2}\left(v_c^2 + v_{вр.}^2 + 2v_c v_{вр.}\cos\varphi_i\right) = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mv_{вр.}^2}{2} + \Delta m v_c v_{вр.}\sum_i \cos\varphi_i \tag{4}$$

Так как суммирование проводится по всем полоскам трубки (по полной окружности), то последняя сумма обращается в нуль. Следовательно, кинетическая энергия трубки равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}. \tag{5}$$

Чтобы убедиться в справедливости сделанного вывода можно так же рассмотреть два участка, симметричных относительно оси трубки.

1.3 Если трубка катится без проскальзывания, то скорость его центра и угловая скорость вращения связаны соотношением $v_c = \omega R$. В этом случае оба слагаемых в формуле (5) равны, поэтому полная энергия трубки равна

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = mv_c^2. \tag{6}$$

1.4 Увеличение кинетической энергии системы равно уменьшению потенциальной груза, поэтому

$$\Delta\left(E_1+E_2\right)=m_0 g\Delta h\,. \qquad (7)$$

В этой формуле

$E_1=\dfrac{mR^2\omega^2}{2}$ - кинетическая энергия трубки;

$E_2=\dfrac{m_0 v^2}{2}=\dfrac{m_0 R^2\omega^2}{2}$ - кинетическая энергия груза.

Выразим кинетическую энергию груза через кинетическую энергию трубки:

$$E_2=\frac{m_0 v^2}{2}=\frac{m_0 R^2\omega^2}{2}=\frac{m_0}{m}\frac{mR^2\omega^2}{2}=\frac{m_0}{m}E_1$$

И подставим в уравнение (7)

$$\Delta\left(E_1+E_2\right)=\Delta\left(E_1+\frac{m_0}{m}E_1\right)=\frac{m+m_0}{m}\Delta E_1=m_0 g\Delta h\,. \qquad (8)$$

Из этого выражения находим изменение кинетической энергии трубки

$$\Delta E_1=\frac{mm_0}{m+m_0}g\Delta h\,. \qquad (9)$$

1.5 Подставим явное выражение для кинетической энергии трубки и воспользуемся подсказкой из условия:

$$\Delta E_1=\Delta\left(\frac{mR^2\omega^2}{2}\right)=\frac{mR^2}{2}\Delta\left(\omega^2\right)=\frac{mR^2}{2}\cdot 2\omega\Delta\omega=mR^2\omega\Delta\omega\,. \qquad (10)$$

Подставим в формулу (9)

$$mR^2\omega\Delta\omega=\frac{mm_0}{m+m_0}g\Delta h\,. \qquad (11)$$

И разделим его на Δt - промежуток времени, за который груз опустился на величину Δh. Также учтем, что скорость груза можно выразить через угловую скорость вращения трубки: $v=\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=\omega R$. В итоге получим

$$mR^2\omega\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{mm_0}{m+m_0}g\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{mm_0}{m+m_0}g\omega R \quad\Rightarrow\quad mR^2\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{mm_0}{m+m_0}gR \qquad (12)$$

Отсюда находим угловое ускорение трубки:

$$\beta=\frac{\Delta\omega}{\Delta y}=\frac{m_0}{m+m_0}\frac{g}{R}\,. \qquad (13)$$

А ускорение груза равно:

$$a=\beta R=\frac{m_0}{m+m_0}g\,. \qquad (14)$$

1.6 Что бы выразить угловое ускорение через силу натяжения нити, ее сначала надо найти. Для этого воспользуемся уравнением второго закона Ньютона для груза:

$$m_0 a=m_0 g-T \quad\Rightarrow\quad T=m_0\left(g-a\right)=m_0\left(g-\frac{m_0}{m+m_0}g\right)=\frac{m_0 m}{m+m_0}g\,. \qquad (15)$$

Теперь перепишем уравнение (12):

$$mR^2\beta = \frac{mm_0}{m+m_0}gR = TR\,,$$

В итоге получаем уравнение динамики вращательного движения:

$$mR^2\beta = M\,. \qquad (16)$$

1.7 Запишем уравнение динамики вращательного движения в рассматриваемом случае:

$$mR^2\beta = -FR. \qquad (17)$$

Из этого уравнения следует, что угловое ускорение трубки постоянно и равно

$$\beta = -\frac{F}{mR} \qquad (18)$$

Поэтому вращение трубки будет равноускоренным (с отрицательным ускорением), а его угловая скорость будет изменяться по линейному закону:

$$\omega = \omega_0 - \frac{F}{mR}t \qquad (19)$$

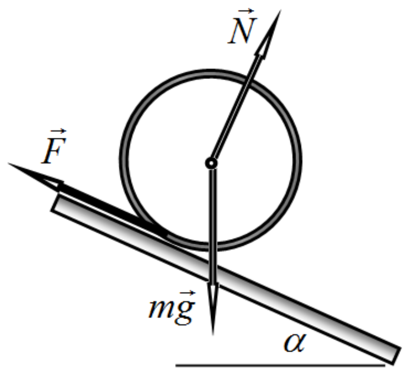
1.8 До остановки трубка повернется на угол

$$\varphi = \frac{\omega_0^2}{2\beta} = \frac{mR\omega_0^2}{2F}\,. \qquad (20)$$

Следовательно, полное число оборотов до остановки равно

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{mR\omega_0^2}{4\pi F}\,. \qquad (21)$$

Часть 2. Скатывание с наклонной плоскости.



2.1 Из уравнения второго закона Ньютона для движения центра масс

$$ma = mg\sin\alpha - F\,, \qquad (21)$$

Находим линейное ускорение оси трубки

$$a = g\sin\alpha - \frac{F}{m}\,. \qquad (22)$$

Теперь запишем уравнение динамики вращения относительно оси трубки (единственной силой, момент которой отличен от нуля, является сила трения):

$$mR^2\beta = FR. \qquad (23)$$

Из этого уравнения определяем угловое ускорение трубки

$$\beta = \frac{F}{mR}\,. \qquad (24)$$

2.2 Если трубка катится без проскальзывания, то линейное и угловые ускорения связаны геометрическим соотношением

$$a = \beta R. \tag{25}$$

Подставим в это соотношения формулы для ускорений (22) и (24)

$$g \sin\alpha - \frac{F}{m} = \frac{F}{m}. \tag{26}$$

Отсюда определяем силу трения

$$F = \frac{1}{2} mg \sin\alpha. \tag{27}$$

2.3 Так как движение происходит без проскальзывания, то данная сила является силой трения покоя. Как следует из закона Кулона – Амонтона сила трения покоя не может быть больше силы трения скольжения, т.е.

$$F \le \mu N = \mu mg \cos\alpha. \tag{28}$$

С учетом формулы (27) это неравенство дает условие качения трубки по наклонной плоскости без проскальзывания:

$$\frac{1}{2} mg \sin\alpha \le \mu mg \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad tg\alpha \le 2\mu. \tag{29}$$