

### Задание 11-3. Шар в потоке.

Расчет сил, действующих на различные тела, движущиеся в газах и жидкостях, является чрезвычайно сложной задачей. Уравнения гидро- и аэродинамики очень сложны, их решение возможно только для простых моделей обтекания тел набегающими потоками. Так как эти проблемы имеют громадное практическое значения, то для их решения применяют различные методы и их комбинации. Одним из эффективных (и эффектных) из них является метод размерностей и подобия, который рекомендуется использовать при решении данной задачи.

#### Введение. Метод размерностей в физике.

Пусть Вам необходимо установить вид зависимости физической величины  $A$  от ряда величин  $x, y, z, \dots$

$$A = f(x, y, z, \dots). \quad (1)$$

Предположим, что эта зависимость имеет степенной вид

$$A = Cx^\alpha y^\beta z^\gamma \dots, \quad (2)$$

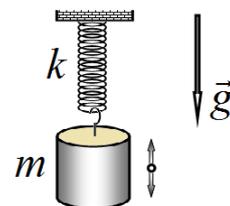
где  $C$  - безразмерный численный коэффициент. Любая физическая формула должна удовлетворять условию размерностей, т.е. размерность величины, стоящей справа, должна совпадать с размерностью величины, стоящей слева. Это условие можно записать в виде символического равенства

$$[A] = [x]^\alpha [y]^\beta [z]^\gamma \dots \quad (3)$$

Здесь и далее обозначено  $[A]$  - размерность величины  $A$ . Равенство (3) иногда позволяет получить систему уравнений для показателей степеней  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Для этого размерности величин следует выразить через основные единицы системы СИ и записать равенства показателей степеней для этих основных единиц. Сразу заметим, что определить значение коэффициента  $C$  в уравнении (2) этим способом не возможно, но... и с этой проблемой иногда можно побороться. Как? - что покажем дальше.

Для того, чтобы прочнее усвоить метод размерностей, решите этим методом следующую простую задачку (ответ которой Вам, конечно, известен).

Груз массы  $m$  подвешен на невесомой пружине жесткости  $k$ . Предположим, что период колебаний подвешенного груза зависит от его массы, жесткости пружины и ускорения свободного падения  $g$ . Представим эту зависимость в виде



$$T = Cm^\alpha k^\beta g^\gamma \quad (4)$$

0.1 Используя метод размерностей, запишите систему уравнений для определения показателей степеней  $\alpha, \beta, \gamma$  в формуле (4). Найдите эти показатели. Запишите формулу для периода колебаний подвешенного пружинного маятника.

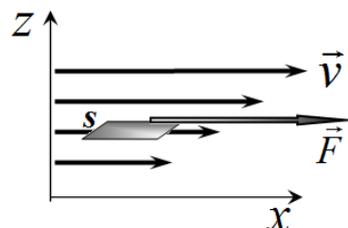
### Часть 1. «Вязкое» лобовое сопротивление.

Перейдем к основному содержанию данного задания. Рассмотрим движение шарика в жидкости или газе.

При движении тела в среде, на него действует сила сопротивления со стороны среды.

Первой основной причиной возникновения сил сопротивления является вязкость среды, обусловленная силами межмолекулярного взаимодействия между слоями движущейся жидкости или газа, и взаимодействия жидкости и поверхности тела.

При движении вязкой жидкости, когда скорость жидкости различна в различных точках, между слоями жидкости возникают силы вязкости. Простейший случай: скорость жидкости  $\vec{v}$  зависит только от одной координаты  $z$  (см. рис.), тогда сила, действующая на площадку площади  $S$  (верхний более быстрый слой «тянет» нижний), задается законом Ньютона для вязкого трения



$$F = \eta \frac{dv_x}{dz} S \quad (5)$$

где  $\eta$  - и есть вязкость (коэффициент вязкости) жидкости или газа.

Если вязкость является основной причиной возникновения силы лобового сопротивления, сила, действующая на шарик, зависит от вязкости среды  $\eta$ , радиуса шарика  $r$ , скорости его движения  $v$ . Иными словами, формула для этой силы имеет вид

$$F = C\eta^\alpha r^\beta v^\gamma. \quad (6)$$

- 1.1 Определите значения показателей степеней  $\alpha, \beta, \gamma$  в формуле (6), запишите эту формулу в явном виде.
- 1.2 Пластилиновый шарик радиуса  $r_1$  медленно опускается в глицерине с постоянной скоростью  $v_1$ . С какой скоростью  $v_2$  будет опускаться пластилиновый шарик в глицерине, если его радиус равен  $r_2 = 2r_1$ ? Считайте, что сила сопротивления определяется формулой (6).

### Часть 2. «Динамическое» сопротивление.

Второй причиной возникновения лобового сопротивления является «динамика» движения жидкости: при обтекании жидкостью тела изменяется направление и модуль скорости течения жидкости. Тем самым изменяется импульс жидкости (газа), который передается телу. Как известно, импульс, переданный в единицу времени, есть сила.

Итак, в данной модели сила определяется импульсом, переданным от среды к шарик. Разумно предположить, что этот импульс определяется плотностью среды  $\rho$ , радиусом шарика  $r$  и его скоростью  $v$ . Поэтому формула для динамического сопротивления должна иметь вид

$$F = C\rho^\alpha r^\beta v^\gamma. \quad (7)$$

- 2.1 Определите значения показателей степеней  $\alpha, \beta, \gamma$  в формуле (7), запишите эту формулу в явном виде.
- 2.2 Дождевая капля воды радиуса  $r_1$  падает в воздухе с некоторой установившейся скоростью  $v_1$ . С какой скоростью  $v_2$  будет опускаться в воздухе капля, радиус которой в два раза больше  $r_2 = 2r_1$ ? Считайте, что сила сопротивления определяется формулой (7).

### Часть 3. Общий случай: действуют обе причины.

В общем случае сила, действующая на шарик, движущийся в вязкой среде, зависит от четырех величин: плотности среды, радиуса шарика, его скорости и вязкости среды. Представим эту зависимость в виде

$$F = C\rho^\alpha r^\beta v^\gamma \eta^\delta. \quad (8)$$

Размерности величин, входящих в эту формулу, выражается через три основных единицы: метр, секунда килограмм. А неизвестных показателей – четыре! Поэтому эти показатели не могут быть определены однозначно.

3.1 Выразите показатели степени  $\alpha, \beta, \gamma$  в формуле (8), через показатель  $\delta$ . Запишите формулу (8) в явном виде.

Представим теперь формулу (8) в виде

$$F = C(\text{Re})\rho^\alpha r^\beta v^\gamma, \quad (9)$$

Где  $C(\text{Re})$  - неизвестная функция от безразмерного параметра  $\text{Re}$ , который называется числом Рейнольдса. Эта функция не известна, но... как известно, «всякая неизвестная функция приблизительно линейна...»

3.2 Выразите безразмерное число Рейнольдса  $\text{Re}$  через параметры задачи  $\rho, r, v, \eta$ .

### Часть 4. Экспериментальные измерения.

Экспериментально измерены силы лобового сопротивления, действующие на различные шарики, движущиеся в различных средах, с различными скоростями. В Таблице 1 представлены результаты таких измерений, в ней указаны: вещество окружающей среды; вязкость этой среды  $\eta$ ; ее плотность  $\rho$ , радиус шарика  $r$ , скорость движения шарика  $v$ , измеренное значение силы лобового сопротивления  $F$ .

Таблица 1.

	$\eta, \text{Па} \cdot \text{с}$	$\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$r, \text{м}$	$v, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$F, \text{Н}$
воздух	$1,8 \cdot 10^{-4}$	1,20	$1,0 \cdot 10^{-3}$	5,0	$1,66 \cdot 10^{-4}$
вода	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	1,0	$2,04 \cdot 10^{-3}$
оливковое масло	$8,4 \cdot 10^{-2}$	$1,26 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	1,0	$8,45 \cdot 10^{-1}$
глицерин	1,48	$0,92 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	10,0	?

4.1 Используя данные таблицы, найдите значение силы лобового сопротивления, действующую на шарик, движущийся в глицерине. Характеристики шарика и глицерина указаны в последней строке Таблицы 1.