Задание 9-2. Неупругий удар.

Часть 1. Движение в горизонтальной плоскости.

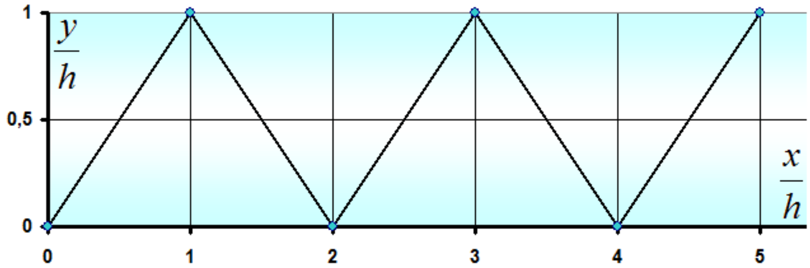
1.1 Согласно принятой модели $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0{,}80$ обе компоненты скорости уменьшаются в одно и тоже число раз, поэтому образуют геометрическую прогрессию со знаменателем γ, после n ударов они будут равны:

$$v_{xn} = v_{yn} = v_0\gamma^n. \qquad (1)$$

Так как проекции скорости на выбранные оси координат остаются равными после каждого столкновения, то тело всегда будет двигаться под углами $\pm 45°$ к оси Ox. Следовательно, между ударами будет смещаться на расстояние h, тогда координаты точек столкновения будут равны

$$x_n = nh. \qquad (2)$$

1.2 В качестве единицы масштаба разумно выбрать расстояние между стенками. Тогда траектория движения будет очень простой, она показана на рисунке.



1.3 Так как проекции скорости движения убывают в соответствии с формулой (1) времена между столкновениями будут возрастать по закону:

$$\tau_n = \frac{h}{v_0\gamma^n} = \frac{h}{v_0}\gamma^{-n}. \qquad (3)$$

Для определения времени n-го столкновения можно рассчитать с помощью формулы для суммы геометрической прогрессии:

$$t_n = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{n-1} = \frac{h}{v_0}\frac{1-\gamma^{-n}}{1-\gamma^{-1}}.. \qquad (4)$$

Тогда средняя скорость до n-го столкновения будет равна (учетом того, что между ударами тело проходит расстояние $h\sqrt{2}$):

$$\langle v\rangle = \frac{nh\sqrt{2}}{\frac{h}{v_0}\frac{1-\gamma^{-n}}{1-\gamma^{-1}}} = v_0\frac{n\left(1-\gamma^{-1}\right)}{1-\gamma^{-n}}. \qquad (5)$$

Часть 2. Прыжки по горизонтальной поверхности.

2.1 Так как компоненты скоростей после каждого удара остаются равными, то после каждого удара тело будет «стартовать» по углом $45°$ к горизонту. После n ударов компоненты скорости также будут описываться формулой (1):

$$v_{xn} = v_{yn} = v_0\gamma^n. \qquad (6)$$

Время между двумя столкновениями полностью определяется вертикальной компонентой скорости и равно:

$$\tau_n = \frac{2v_{yn}}{g} = \frac{2v_{yn}}{g} = \frac{2v_0\gamma^n}{g}. \qquad (7)$$

Смещение в горизонтальном направлении после n-го равно

$$\Delta x_n = v_{xn} \cdot \tau_n = \frac{2v_0^2\gamma^{2n}}{g}. \qquad (8)$$

Тогда координата n-го удара равна сумме предыдущих смещений

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{2v_0^2}{g}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma^{2i} = \frac{2v_0^2}{g}\frac{1-\gamma^{2n}}{1-\gamma^2}. \qquad (9)$$

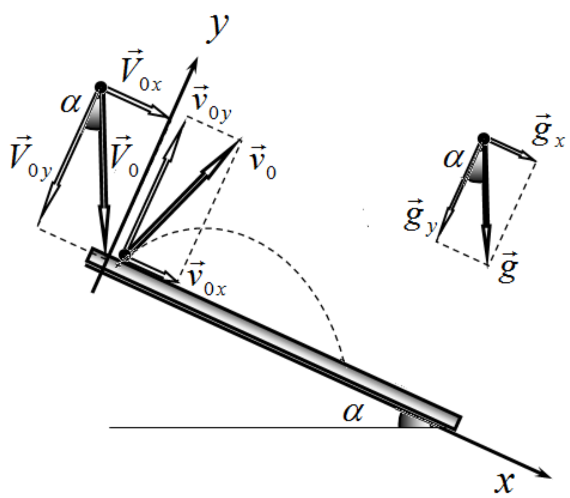
2.2 Из формулы (8) следует, что при $n \to \infty$ координата x_n стремиться к предельному значению, которое и будет максимальным смещением

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2}{g\left(1-\gamma^2\right)}. \qquad (10)$$

Часть 3. Столкновения с наклонной плоскостью.

3.1 Между двумя последовательными ударами движение тела является равноускоренным с ускорением свободного падения $\vec{g}$. Будем решать задачу в системе отсчета, показанной на рисунке. В этой системе проекции ускорения на оси координат равны:

$$\begin{aligned} g_x &= g\sin\alpha \\ g_y &= -g\cos\alpha \end{aligned}. \qquad (11)$$



В момент падения тела на наклонную плоскость (назовем его нулевым ударом) проекции скорости тела на оси координат описываются формулами

$$\begin{aligned} V_{0x} &= V_0\sin\alpha \\ V_{0y} &= -V_0\cos\alpha \end{aligned}. \qquad (12)$$

После удара эти компоненты скорости в рамках принятой модели удара описываются формулами

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \gamma V_0\sin\alpha \\ v_{0y} &= \gamma V_0\cos\alpha \end{aligned}. \qquad (13)$$

После столкновения с плоскость закон движения частицы задается функциями:

$$\begin{cases} x(t) = \gamma V_0 \sin\alpha \cdot t + \dfrac{g\sin\alpha}{2} t^2 \\ y(t) = \gamma V_0 \cos\alpha \cdot t - \dfrac{g\cos\alpha}{2} t^2 \end{cases}. \tag{14}$$

В момент падения координата y обращается в нуль, из этого условия легко найти время τ движения до очередного столкновения:

$$y(\tau) = 0 = \gamma V_0 \cos\alpha \cdot \tau - \frac{g\cos\alpha}{2}\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \gamma \frac{2V_0}{g}. \tag{15}$$

Тогда координата x в момент первого удара оказывается равной:

$$\begin{aligned} x_1 = x(\tau) &= \gamma V_0 \sin\alpha \cdot \tau + \frac{g\sin\alpha}{2}\tau^2 = \gamma V_0 \sin\alpha \cdot \gamma \frac{2V_0}{g} + \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\gamma \frac{2V_0}{g}\right)^2 = \\ &= \gamma^2 \frac{4V_0^2 \sin\alpha}{g} \end{aligned}. \tag{16}$$

3.2 Рассмотрим, как изменяются проекции скоростей частицы при последовательных соударениях. Если изменение координат описывается функциями (14), то изменение проекций скорости подчиняются следующим выражениям

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \gamma V_0 \sin\alpha + g\sin\alpha \cdot t \\ v_y(t) &= 0 = \gamma V_0 \cos\alpha - g\cos\alpha \cdot t \end{aligned} \tag{17}$$

Тогда непосредственно перед первым (после нулевого) ударом в момент времени $\tau = \gamma \dfrac{2V_0}{g}$ они оказываются равными:

$$\begin{aligned} v_x(\tau) &= \gamma V_0 \sin\alpha + g\sin\alpha \cdot \tau = \gamma V_0 \sin\alpha + g\sin\alpha \cdot \gamma \frac{2V_0}{g} = 3\gamma V_0 \sin\alpha \\ v_y(\tau) &= 0 = \gamma V_0 \cos\alpha - g\cos\alpha \cdot \tau = \gamma V_0 \cos\alpha - g\cos\alpha \cdot \gamma \frac{2V_0}{g} = -\gamma V_0 \cos\alpha \end{aligned}. \tag{18}$$

А сразу после этого удара

$$\begin{aligned} v_{1,x} &= \gamma\left(3\gamma V_0 \sin\alpha\right) = 3\gamma^2 V_0 \sin\alpha \\ v_{1,y} &= \gamma V_0 \cos\alpha \end{aligned}. \tag{19}$$

Обратим внимание, что нормальная составляющая скорости частицы $v_{1,y}$ оказалась равной аналогичной величине после первого удара! Чтобы «прыжки» были одинаковыми, необходимо, чтобы и v_x компонента восстановилась $v_{1,x} = v_{0x}$. Это произойдет если коэффициент восстановления равен

$$\gamma = \frac{1}{3}. \tag{20}$$