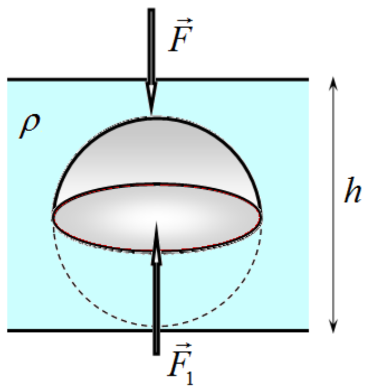
Задание 1. Архимедова разминка.

Данная задача состоит из двух не связанных между собой задач.

Задача 1.1 Шар на дне сосуда.

1.1.1 Рассчитать непосредственно силу давлении воды на половину шара достаточно сложная математическая задача: давление зависит от глубины, направление силы давления также изменяется от точки к точке.

Поэтому для расчета искомой силы можно применить простой искусственный прием. Мысленно разрежем шар по диаметру и уберем нижнюю половину. После такой «операции» искомая сила давления на верхнюю половину поверхности шара $\vec{F}$ не изменится. Но легко можно найти силу давления на «срез» шара:



$$F_1 = PS = \rho g(4R - R)\cdot \pi R^2 = 3\pi R^3 \rho g\ . \qquad (1)$$

Векторная сумма сил давления на верхнюю половину и на нижний «срез» равна силе Архимеда, действующей на половину шара, поэтому

$$F_A = F_1 - F\ . \qquad (2)$$

Из этого уравнения с учетом формулы для силы Архимеда находим:

$$F = F_1 - F_A = 3\pi R^3 \rho g - \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{7}{3}\pi R^3 \rho g\ . \qquad (3)$$

Задача 1.2 Однородный стержень в неоднородной жидкости.

1.2.1 – 1.2.2 Так как искомая зависимость плотности от глубины погружения является линейной, то она описывается формулой

$$\rho(z) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} z\ . \qquad (1)$$

Чтобы тело плавало, необходимо, что сила Архимеда могла уравновесить силу тяжести.
Сила тяжести, действующая на стержень равна

$$mg = \rho_0 l S g\,, \qquad (2)$$

где S - площадь поперечного сечения стержня.

Сила Архимеда равна силе тяжести, действующей на вытесненный объем воды. Так плотность воды изменяется по линейному закону, то при расчете массы столбика вытесненной воды можно использовать ее среднюю плотность, равную среднему арифметическому плотностей на ее краях, или равной ей плотности на середине столбика. Поэтому при погружении нижнего конца стержня на глубину z, действующая на него сила Архимеда будет равна

$$F_A = \frac{\rho_1 + \rho(z)}{2} zSg = \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l} z\right) zSg\ . \qquad (3)$$

Из условия плавания следует уравнение для определения глубины погружения:

$$\rho_0 l = \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l} z\right) z\,. \qquad (4)$$

Предельным случаем плавания является $z = l$. Поэтому условием плавания является выполнение очевидного условия:

$$\rho_0 l < \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l} l\right) l = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} l\,. \qquad (5)$$

Или

$$\rho_0 < \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}\,. \qquad (6)$$

Для определения глубины погружения необходимо решить уравнение (4), из которого следует, что

$$z = l\,\frac{\sqrt{\rho_1^2 + 2\rho_0(\rho_2 - \rho_1)} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\,. \qquad (7)$$

1.2.3 Что бы вертикальное плавание было устойчиво, необходимо, чтобы центр масс стержня находился глубже, чем центр масс вытесненного столбика воды. При полном погружении стержня его центр масс погружается на глубину $\frac{l}{2}$. Чтобы центр масс вытесненной воды находился выше этой точки необходимо, чтобы плотность жидкости у поверхности была больше, чем плотность жидкости у дна, т.е.

$$\rho_2 < \rho_1\,. \qquad (8)$$

В этом случае жидкость в поле тяжести станет неустойчивой, начнется ее перемешивание, поэтому реализовать такой эксперимент нельзя.