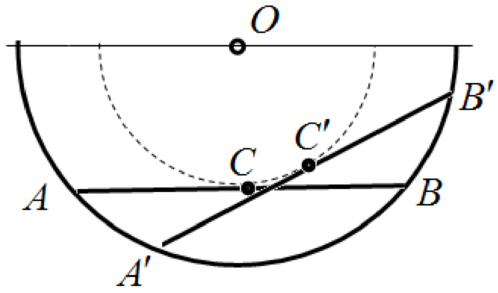
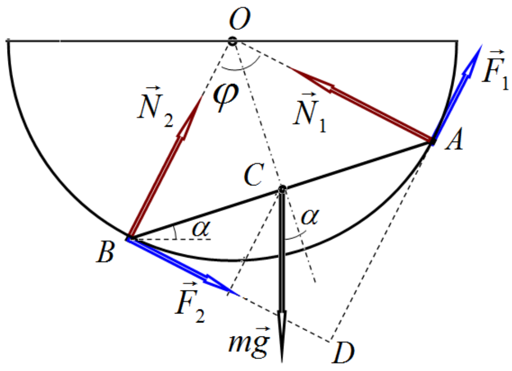
Задача 1. Иголка в сферическом бокале.



1. При смещении концов стержня по поверхности сферы центр стрежня (он же центр масс) движется по дуге окружности, центр которой совпадает с центром сферической чаши. Следовательно, при горизонтальном расположении стрежня его центр масс находится в нижнем положении, поэтому в этом случае потенциальная энергия стержня минимальна. Поэтому горизонтальное положение стержня есть положение устойчивого равновесия.



2. При отклонении стержня от горизонтального положения он стремится вернуться к положению равновесия. Это рассуждение позволяет определить направления сил трения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующих на концы стержня (см. рисунок). Направления сил реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ однозначны: они направлены радиально и направлены к центру полусферы. Условия равновесия стержня традиционны: векторная сумма сил, действующих на стержень, равна нулю; сумма моментов этих сил также равна нулю.

Заметим, что все силы, действующие на стержень, лежат в одной плоскости. Поэтому можно записать только два независимых уравнения для суммы проекций сил, действующих на стержень. Так как сумма сил, действующих на стержень, равна нулю, то сумма моментов этих сил (которая равна нулю) не зависит от того, относительно какой точки рассматриваются эти силы. Поэтому можно записать только три независимых скалярных уравнения для определения действующих сил. Кроме того, в положении равновесия, когда стрежень неподвижен, нельзя однозначно выразить силу трения через соответствующую силу нормальной реакции, так как в этом случае сила трения есть сила трения покоя. Поэтому связь между этими сила ми выражается неравенством:

$$F_{тр.} \le \mu N \quad . \tag{1}$$

Следовательно, все силы не определяются однозначно – их значения зависят от того, как способом стержень привели в положение равновесия. Таким образом, данная задача является недоопределенной: значения сил реакции и трения не определяются однозначно.

В такой ситуации мы можем определить только диапазоны, в которых могут лежать значения рассматриваемых сил. Для этого три из четырех неизвестных сил (две силы реакции и две силы трения) выразить через одну из них, а после этого, используя два неравенства (1) найти диапазоны изменения сил. Так как в вопросе 2, требуется определить пределы возможного изменения силы N_1, то имеет смысл выразить остальные силы именно через модуль силы N_1.

Как следует из рисунка, задача сильно упрощается благодаря тому, что угол $\varphi = 90°$: силы реакции и силы трения направлены вдоль сторон квадрата *OADB*, длина стороны которого равна радиусу чаши. Для упрощения алгебраических выкладок будем записывать такие уравнения, в которые входят только $\vec{N}_1$ и одна из оставшихся неизвестных сил.

1) Запишем сумму моментов сил (и приравняем ее к нулю) относительно точки B**:**

$$F_1R + N_1R - mg\frac{l}{2}\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

Выбор этого уравнения обусловлен тем, что него входят только силы F_1 и N_1, что позволяет сразу получить зависимость $F_1(N_1)$:

$$F_1 = mg\frac{l}{2R}\cos\alpha - N_1 = mg\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} - N_1. \qquad (3)$$

2) Для установления связи между F_2 и N_1 спроецируем все силы на направление BD (сумма этих проекций также равна нулю)

$$F_2 + mg\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - N_1 = 0. \qquad (4)$$

Из этого уравнения находим:

$$F_2 = N_1 - mg\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = N_1 - \frac{mg}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha). \qquad (5)$$

3) Наконец, для определения силы реакции $N_2(N_1)$, запишем (и приравняем к нулю) сумму моментов сил относительно точки D:

$$N_2R - N_1R - mg\sin\alpha\frac{R}{\sqrt{2}} = 0\ . \qquad (6)$$

В этом уравнении $\frac{R}{\sqrt{2}}$ - длина половины диагонали квадрата CD. Из уравнения (6) находим искомое соотношение

$$N_2 = N_1 + \frac{mg}{\sqrt{2}}\sin\alpha\ . \qquad (7)$$

Как следует из полученных формул, все рассмотренные силы пропорциональны силе тяжести, поэтому дальнейший анализ удобно (но не обязательно) проводить, считая единицей измерения силы величину $\frac{mg}{\sqrt{2}}$. В этом случае введем относительные величины сил:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{F_1\sqrt{2}}{mg} = \cos\alpha - n_1 \\ f_2 &= \frac{F_2\sqrt{2}}{mg} = n_1 - (\cos\alpha - \sin\alpha). \\ n_2 &= n_1 + \sin\alpha \end{aligned} \qquad (8)$$

Воспользуемся теперь неравенствами (2), устанавливающими связь между силами трения и нормальной реакции. При равновесии в верхней точке A выполняется соотношение

$$f_1 < \mu n_1 \qquad (9)$$

Из которого с учетом выражений (8) следует:

$$\cos\alpha - n_1 < \mu n_1 \quad \Rightarrow \quad n_1 > \frac{\cos\alpha}{1+\mu} \qquad (10)$$

Аналогично для нижней точки стержня B:

$$f_2 < \mu n_2 \qquad (11)$$

Откуда следует:

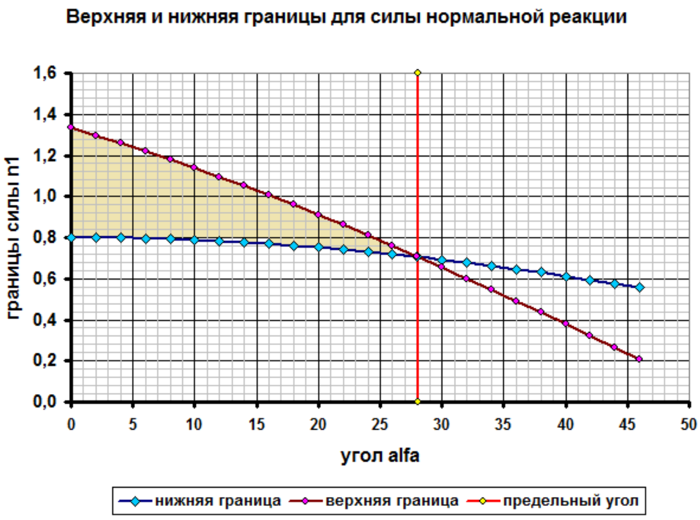
$$n_1 - (\cos\alpha - \sin\alpha) < \mu(n_1 + \sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad n_1 < \frac{\cos\alpha}{1-\mu} - \sin\alpha\ . \qquad (12)$$

Таким образом, в положении равновесия сила нормальной реакции может лежать в интервале

$$\frac{mg}{\sqrt{2}}\frac{\cos\alpha}{1+\mu} \le N_1 \le \frac{mg}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos\alpha}{1-\mu} - \sin\alpha\right). \qquad (13)$$

На рисунке показаны графики зависимостей верхней и нижней границ возможных значений силы нормальной реакции n_1 (определяемые формулами (10) и (12)) от угла α. На этом графике выделена область возможных значений силы нормальной реакции.

Из этого рисунка следует, что существует точка пересечения графиков границ, которая и соответствует максимально возможному углу наклона стержня в положении равновесия.



3. Для определения максимального угла следует решить уравнение:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\mu} - \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{1+\mu}. \qquad (14)$$

Из этого уравнения находим:

$$tg\alpha = \frac{2\mu}{1-\mu^2} \approx 0{,}53. \qquad (15)$$

Или $\alpha = 28°$. Таким образом стрежень может находиться в состоянии равновесия при

$$\alpha < 28°. \qquad (16)$$