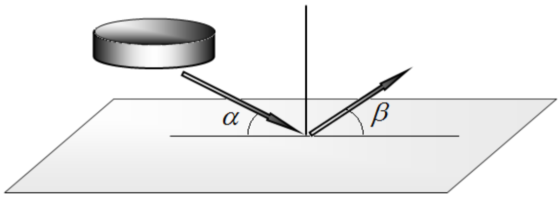
Задание 3. «Блинчики» на воде.

Каждый из Вас когда-либо пытался бросать камень на озёрную гладь, добиваясь отскоков. Конечно, чем больше блинчиков получится – тем лучше! Однако, данный трюк повторить не так-то уж и просто. Большинству из нас знакомы эмпирические правила: необходимо выбирать сплюснутые камни с гладкой поверхностью, бросать их как можно сильнее под малым углом к поверхности воды, при этом слегка закручивая. В данной задаче попробуем разобраться, какие параметры и как влияют на количество отскоков камня.

Часть 1. Отскок от земли

Для начала рассмотрим отражение камня от поверхности земли. Камень дискообразной формы падает плашмя на поверхность земли. Скорость камня в начальный момент удара v_0 направлена под углом α к горизонту. Коэффициент трения μ. Удар абсолютно упругий (проекция скорости на вертикальную ось поменяет свой знак).

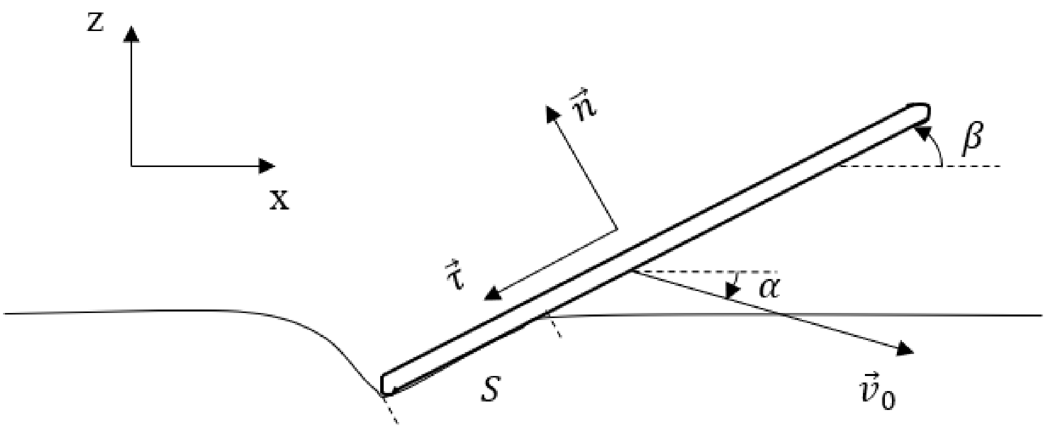


Действием силы тяжести за время удара в данной части можно пренебречь.

1.1. Найдите угол β, а также скорость камня v после удара.

Часть 2. Отскок от воды

Камень массы M падает на поверхность воды со скоростью v_0, направленной под углом $\alpha \ll 1$ к горизонту. Угол между поверхностью камня и горизонтом $\beta \ll 1$ (см. рис.).



Точное описание соударения камня о воду требует нахождения течений, возникающих в процессе удара, путём решения уравнения Навье-Стокса. Данная задача является достаточно трудной и может быть решена лишь численными методами. Рассмотрим упрощённую модель взаимодействия камня с водой:

- при ударе на камень (если он не погрузился в воду полностью) действует сила вязкого трения, которая определяется выражением

$$F_{\text{в}} = C_n \rho v^2 S\vec{n} + C_\tau \rho v^2 S\vec{\tau} \text{ ,}$$

где ρ – плотность воды, v – модуль скорости камня, S – площадь погруженной части камня, C_n и C_τ – безразмерные коэффициенты, имеющие одинаковый порядок величины и зависящие от углов α и β, $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – единичные векторы, указанные на рисунке;

- в процессе соударения скорость камня и угол α меняются незначительно, а угол β не меняется вовсе;
- в силу последнего приближения величины C_n и C_τ постоянны в процессе удара;
- начала отсчёта Oz и Ox выберем в месте, где камень начинает соприкасаться с водой;
- в силу наличия набегающих волн, обтекающих камень при ударе, будем считать, что площадь погруженной части камня линейно зависит от глубины погружения: $S = a|z|$, величину a считайте известной.

2.1. Запишите уравнение движения камня в проекции на оси X и Z. Упростите данные уравнения с учётом указанных приближений.
2.2. Покажите, что в любой момент времени проекции силы сопротивления воды связаны соотношением $F_{\text{в x}} = -\mu F_{\text{в z}}$. Получите выражение для коэффициента μ.
2.3. Найдите зависимость координаты нижней точки камня от времени $z(t)$.
2.4. Найдите время соударения камня с водой t_0.

Пусть масса камня $M = 0.1$ кг, скорость перед ударом $v_0 = 10$ м/с, углы $\alpha = \beta = 10°$, для данных углов и формы камня $a = 60$ см, площадь поверхности камня $S_0 = 100$ см^2 (вся поверхность), коэффициенты $C_n = C_\tau = 0{,}5$, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Ускорение свободного падения $g \approx 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

2.5. Для указанных параметров вычислите время соударения t_0 и расстояние l_0, пройденное камнем вдоль оси X за время соударения.
2.6. Найдите среднюю проекцию равнодействующей силы, действующей на камень, на ось X $\langle F_x \rangle$.
2.7. Отскочит ли камень при указанных параметрах? Если да, то с какой конечной скоростью и под каким углом к горизонту?
2.8. Можно ли в данной модели воду считать твёрдым телом?

Подсказка.

- $\langle \sin\varphi \rangle_{\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]} = \dfrac{2}{\pi}$.