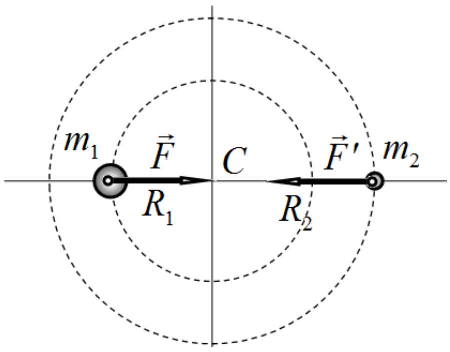
Задание 10-2. Космический инфракрасный телескоп Джеймс Уэбб. Решение.

1. На основании 2 закона Ньютона и закона всемирного тяготения запишем уравнения, описывающие круговые движения обоих тел:

$$\begin{gathered} m_1\omega^2 R_1 = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \\ m_2\omega^2 R_2 = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \end{gathered} . \qquad (1)$$



Здесь ω - угловая скорость движения тел. Из этих уравнений следует, что радиусы орбит удовлетворяют условию

$$m_1 R_1 = m_2 R_2 . \qquad (2)$$

Это соотношение указывает, что центр окружностей является центром масс системы двух тел.

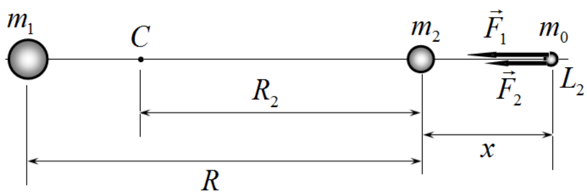
2. Сумма радиусов равна расстоянию между телами

$$R_1 + R_2 = R . \qquad (3)$$

Из уравнений (2) - (3) находим радиусы орбит:

$$\begin{gathered} R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R \\ R_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R \end{gathered} . \qquad (4)$$

3. Для тела массы m_0, находящегося в точке Лагранжа, справедливо уравнение



$$m_0\omega^2 (R_2 + x) = G\frac{m_0 m_1}{(R + x)^2} + G\frac{m_0 m_2}{x^2} . \qquad (5)$$

Из уравнения (1) выразим значение угловой скорости

$$\omega^2 = G\frac{m_2}{R^2}\frac{1}{R_1} = G\frac{m_2}{R^2}\frac{m_1 + m_2}{m_2 R} = G\frac{m_1 + m_2}{R^3}$$

И подставим его в уравнение (5), также как выражение для R_2:

$$G\frac{m_1+m_2}{R^3}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}R+x\right)=G\frac{m_1}{(R+x)^2}+G\frac{m_2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{m_1+m_2}{R^3}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}R+x\right)=\frac{m_1}{(R+x)^2}+\frac{m_2}{x^2} \Rightarrow \qquad (6)$$

$$\frac{m_1}{R^2}+\frac{m_1+m_2}{R^3}x==\frac{m_1}{(R-x)^2}+\frac{m_2}{x^2}$$

Наконец, разделим уравнение на массу большего тела и введем отношение масс массивных тел $\mu=\frac{m_2}{m_1}$, в результате получим уравнение для расчета значения расстояния от второго тела до первой точки Лагранжа:

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1+\mu}{R^3}x==\frac{1}{(R+x)^2}+\frac{\mu}{x^2} \qquad (7)$$

4. Очевидно, что масса спутника значительно меньше массы Земли, поэтому его положение совпадает с точкой Лагранжа. Поэтому для расчета расстояния до Земли следует решить уравнение (7). Точное решение этого уравнения затруднительно. Однако, масса Земли значительно меньше массы Солнца $\mu=3{,}0\cdot10^{-6}<<1$, поэтому расстояние до Земли значительно меньше радиуса Земной орбиты $x<<R$ (который практически равен расстоянию от центра Земли до центра Солнца). В этом случае можно решить данное уравнение приближенно (но с высокой точностью), для чего следует провести следующее разложение:

$$\frac{1}{(R+x)^2}\approx\frac{1}{R^2}-\frac{2}{R^3}x. \qquad (8)$$

После этого разложения уравнение решается элементарно:

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1+\mu}{R^3}x==\frac{1}{(R+x)^2}+\frac{\mu}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{R^2}+\frac{1+\mu}{R^3}x=\frac{1}{R^2}-\frac{2}{R^3}x+\frac{\mu}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{3+\mu}{R^3}x=\frac{\mu}{x^2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R \qquad (9)$$

Численный результат:

$$x=\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R=1{,}5\cdot10^6\,км. \qquad (10)$$