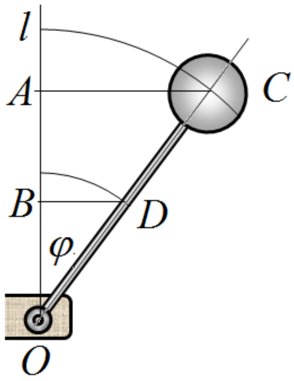
Задание 11-3. Морской хронометр. (Решение).



1. При отклонении стержня на угол φ шарики опускаются на расстояние $l(1-\cos\varphi)$, поэтому изменение потенциальной энергии в поле тяжести равно

$$\Delta U = 2mgl(1-\cos\varphi) \qquad (1)$$

Удлинение пружины оказывается равным

$$\Delta x = 2|BD| = 2\cdot\frac{l}{2}\sin\varphi = l\sin\varphi. \qquad (2)$$

Следовательно, потенциальная энергия пружины при ее растяжении ($\varphi > 0$) описывается функцией

$$U_{упр.} = \frac{k}{2}(l\sin\varphi)^2 \qquad (3)$$

При сжатии пружины ($\varphi < 0$) потенциальная энергия пружины равна нулю.

Таким образом, зависимость потенциальной энергии системы от угла отклонения имеет вид:

$$U(\varphi) = \begin{cases} 2mgl(1-\cos\varphi) + \frac{k}{2}(l\sin\varphi)^2, & \varphi > 0 \\ 2mgl(1-\cos\varphi), & \varphi < 0 \end{cases} \qquad (4)$$

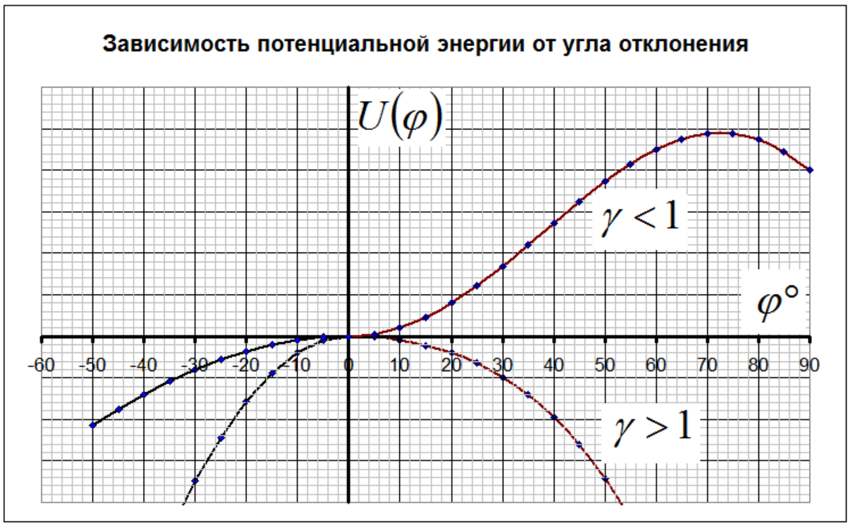
Для удобства дальнейшего анализа этой функции, воспользуемся рекомендацией, данной в условии, для чего используем параметр γ. Для этого разделим выражение (4) на $\frac{kl^2}{2}$:

$$2\frac{U(\varphi)}{kl^2} = u(\varphi) = \begin{cases} 2\gamma(1-\cos\varphi) + \sin^2\varphi, & \varphi > 0 \\ 2\gamma(1-\cos\varphi), & \varphi < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Анализ этих графиков можно проводить различными способами:

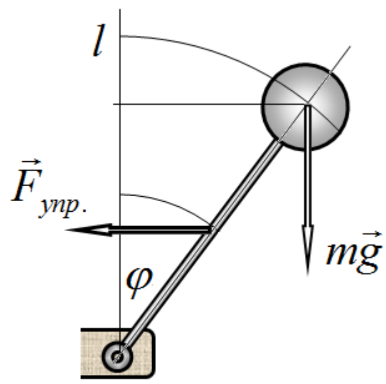
- подсчитать значения функции численно;
- заметить, что данная функция является квадратичной функцией от $\cos\varphi$, т.к. $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$;
- найти точки экстремумов и значения функции в крайних точках.

Результаты такого анализа показаны на рисунке.



2. Для того, чтобы в системе были возможны колебания, необходимо, что бы существовала точка минимума потенциальной энергии. Вертикальное положение стержня ($\varphi = 0$) является положением равновесия, но оно неустойчиво. При отклонении в отрицательную сторону стрежень падает. Что очевидно: пружина не может его отталкивать!

При $\gamma < 1$ Существует еще одно положение равновесия, но оно также неустойчиво. Это можно показать, если рассмотреть моменты сил, действующих на вертикальный маятник. Положению равновесия соответствует равенство модулей моментов силы тяжести $mgl\sin\varphi$ и силы упругости $(kl\sin\varphi)\cdot\left(\frac{l}{2}\cos\varphi\right) = \frac{kl^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi$:



$$mgl\sin\varphi = \frac{kl^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi \; . \qquad (6)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\gamma\sin\varphi = \sin\varphi\cos\varphi \; , \qquad (7)$$

Из которого следует, что при $\gamma < 1$, существует положение равновесия $\cos\varphi = \gamma$, помимо вертикального положения $\varphi = 0$. Но как было отмечено ранее – это положение равновесия является неустойчивым, поэтому колебания возле него невозможны.

3. Если длина пружины больше расстояния между стержнями, то удлинение пружины будет равно

$$\Delta x = 2\frac{l}{2}\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right). \qquad (8)$$

Поэтому уравнение равновесия (7) примет вид

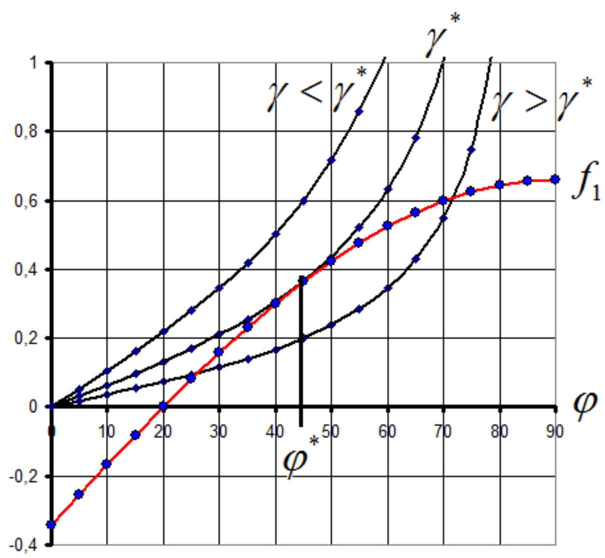
$$\gamma\sin\varphi = \left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right)\cos\varphi \, . \qquad (9)$$

4. Итак, положения равновесия существуют, если это уравнение имеет корни! Решить это уравнение аналитически затруднительно, поэтому поставим более простую задачу: найти условия, при которых корни существуют в интервале $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Перепишем уравнение в более простой форме

$$\gamma\, tg\varphi = \sin\varphi - \sin\varphi_0 \, . \qquad (10)$$

Легко построить схематический график функции $f_1 = \sin\varphi - \sin\varphi_0$ и несколько графиков функции $f_2 = \gamma\, tg\varphi$ при нескольких возрастающих значениях параметра γ. При $\gamma = 0$ уравнение (10) имеет очевидный корень $\varphi = \varphi_0$; при увеличении параметра γ тангенсоида приподнимается, но пересекает график функции f_1; при некотором критическом значении γ^* эти функции



касаются друг друга; наконец, при $\gamma > \gamma^*$ уравнение (10) корней не имеет. Для расчета критического значения γ^* нужно записать условия касания двух функций: в точке касания функции равны между собой, также равны их производные (для упрощения опустим знак «звездочки»):

$$\begin{aligned} &\gamma\, tg\varphi = \sin\varphi - \sin\varphi_0 \\ &\frac{\gamma}{\cos^2\varphi} = \cos\varphi \end{aligned} . \tag{10}$$

Из второго уравнения находим, что $\gamma = \cos^3\varphi$, подставляя в первое уравнение, после несложных преобразований получим,

$$\begin{aligned} &\cos^3\varphi\, tg\varphi = \sin\varphi - \sin\varphi_0 \quad \Rightarrow \\ &\cos^2\varphi \sin\varphi = \sin\varphi - \sin\varphi_0 \quad \Rightarrow \\ &\sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi = \sin\varphi_0 \quad \Rightarrow \\ &\sin^3\varphi = \sin\varphi_0 \end{aligned} . \tag{11}$$

Таким образом, точка касания задается условием

$$\sin\varphi^* = \sqrt[3]{\sin\varphi_0}\,. \tag{12}$$

Тогда критическое значение параметра равно

$$\gamma^* = \cos^3\varphi^* = \left(1-\sin^2\varphi^*\right)^{3/2} = \left(1-\left(\sin\varphi_0\right)^{2/3}\right)^{3/2}. \tag{13}$$

Таким образом, колебания маятников возможны при

$$0 < \gamma < \left(1-\left(\sin\varphi_0\right)^{2/3}\right)^{3/2}. \tag{14}$$

Отметим, что при $\gamma = 0$ масса шаров равна нулю, поэтому колебания невозможны.

5. Легко показать, что положению устойчивого равновесия соответствует меньший корень уравнения (10), поэтому вблизи этого положения возможны колебания стержней.

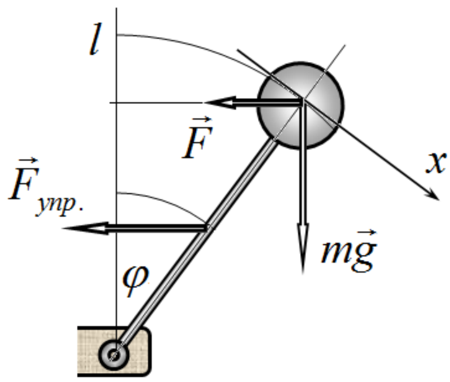
6. При заданном значении $\varphi_0 = 10^0$ можно использовать приближенный формулы для тригонометрических функций в этом случае уравнение (9) линеаризуется

$$\gamma\varphi = (\varphi - \varphi_0). \tag{15}$$

Решение которого находится элементарно:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{1-\gamma} \approx 14^\circ. \tag{16}$$

7. Рассмотрим силы, действующие на шарик: это сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}$, действующая со стороны стержня. Так масса стержня пренебрежимо мала, то сумма моментов сил, действующих на стержень, равна нулю. Следовательно, со стороны шарика на стержень действует сила в 2 раза меньшая силы упругости и направленная противоположно ей. Поэтому на шарик (третий закон Ньютона!) действует сила в 2 раза меньшая силы упругости и сонаправленная с ней.



В проекции на ось x, касательную к траектории, уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$ma = mg\sin\varphi - \frac{kl(\sin\varphi - \sin\varphi_0)}{2}\cos\varphi \,. \tag{17}$$

Полагая углы малыми, получим уравнение

$$ma = mg\varphi - \frac{kl(\varphi - \varphi_0)}{2} = -\frac{kl}{2}\left(1 - \frac{2mg}{kl}\right)\varphi + \frac{kl\varphi_0}{2} = -\frac{kl}{2}(1-\gamma)\frac{x}{l} + \frac{kl\varphi_0}{2}, \tag{18}$$

Которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k(1-\gamma)}} \,. \tag{19}$$

8. Колебания возможны, если маятник не попадет в область $\varphi < 0$. Следовательно, амплитуда колебаний не должна превышать значение угла, соответствующее положению равновесия, т.е.

$$\varphi_{\max} < \varphi_1 = 14^\circ \,. \tag{20}$$