Задание 3. Диск на рельсах. Решение.

Часть 1. Динамика вращательного движения.

1.1 Уравнение (1) можно получить различными способами. Например, рассмотрим малый промежуток времени Δt. Изменение кинетической энергии диска равно работе силы трения, поэтому

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{4}\right) = -2F_{тр.}v\Delta t\,. \qquad (1)$$

Изменение кинетической энергии за малый промежуток времени преобразуем следующим образом

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{4}\right) = \frac{m}{4}\left((v+\Delta v)^2 - v^2\right) = \frac{m}{2}v\Delta v\,, \qquad (2)$$

мы пренебрегли малым слагаемым $(\Delta v)^2$. Подстановка этого выражения в уравнение (1) приводит к требуемому результату

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -4\frac{F_{тр.}}{m}\,. \qquad (3)$$

1.2 В рассматриваемом случае

$$F_{тр.} = \frac{1}{2}\mu mg \qquad (4)$$

Поэтому

$$R\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -2\mu g\,. \qquad (5)$$

Так как угловое ускорение постоянно, то угловая скорость изменяется по закону

$$\omega = \omega_0 - 2\frac{\mu g}{R}t\,. \qquad (6)$$

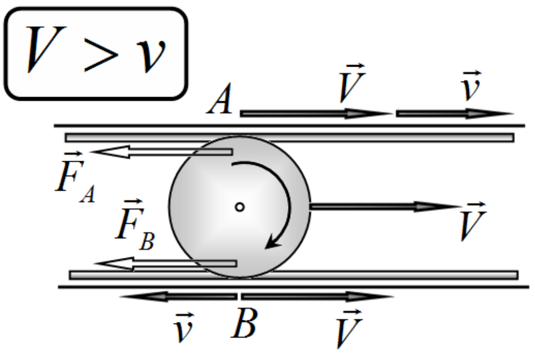
Из этой функции находим время, за которое угловая скорость уменьшается вдвое:

$$\frac{\omega_0}{2} = \omega_0 - 2\frac{\mu g}{R}t \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\omega_0 R}{4\mu g}\,. \qquad (7)$$

1.3 Полное число оборотов до остановки проще выразить из уравнения (1):

$$\frac{mR^2\omega_0^2}{4} = \mu mg\cdot(2\pi RN) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{R\omega_0^2}{8\pi\mu g}\,. \qquad (8)$$

Часть 2. Движение диска по рельсам.



2.1 Сила трения направлена в сторону противоположную относительной скорости точек соприкосновения тел. Поэтому направления сил трения, действующих на диск со стороны разных рельсов, зависят от соотношения между скоростями поступательного V и вращательного v движения крайних точек диска.

Если $V > v$, то эти крайние точки движутся в одну сторону, поэтому обе силы трения направлены в сторону, противоположную вектору V. В этом случае скорость поступательного движения будет уменьшаться по закону

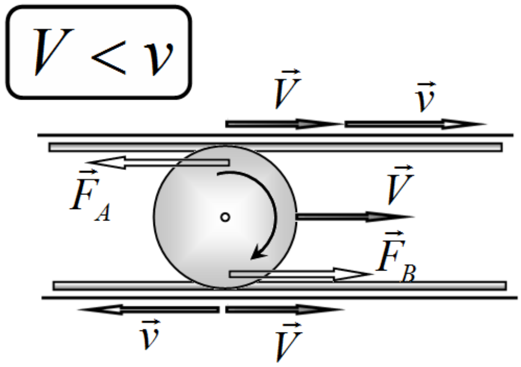
$$V = V_0 - a_1 t = V_0 - \mu g t\,, \tag{9}$$

Здесь обозначено $a_1 = \mu g$ - модуль ускорения для поступательного движения.

Так как силы трения направлены в одну сторону, то суммарный момент силы трения равен нулю, поэтому **угловая скорость вращения изменяться не будет**.

Иная ситуация реализуется при $V < v$.

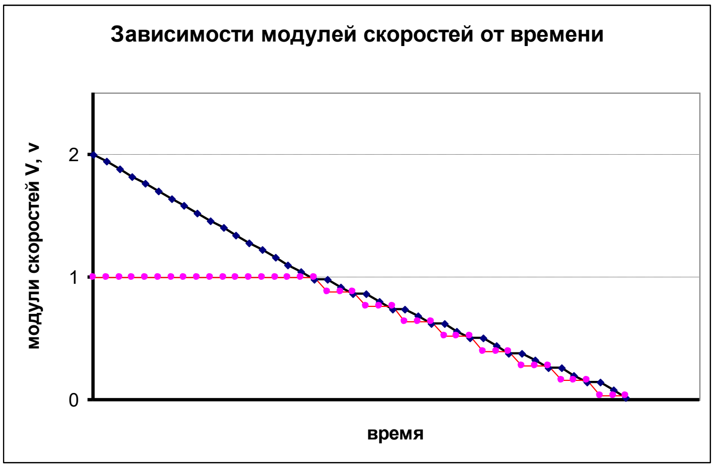
В этом случае силы трения, действующие на крайние точки диска, будут направлены в противоположные стороны. Тогда **скорость поступательного движения изменяться не будет,** а скорость вращательного движения будет изменяться в соответствии с формулой (6):



$$\omega = \omega_0 - 2\frac{\mu g}{R}t \quad \Rightarrow$$
$$v = \omega_0 R - a_2 t = \omega_0 R - 2\mu g t \tag{10}$$

Здесь $a_2 = 2\mu g$ - модуль ускорения вращательного движения. Движение с точным совпадением скоростей $V = v$ невозможно. Поэтому при $V \approx v$ движение диска будет носить более сложный характер, в какие малые промежутки времени при $V > v$ будет уменьшаться скорость поступательного движения (а вращательного сохраняться), в другие промежутки времени при $V < v$ будет сохраняться скорость поступательного движения, а скорость вращательного движения уменьшаться. Такое попеременное движение усреднено можно представить, как движение с некоторым средним ускорением.

На основании проведенных рассуждений графики зависимости скоростей от времени будет иметь вид: в течение некоторого промежутка времени t_1 скорость поступательного движения будет уменьшаться, а скорость вращательного движения оставаться неизменной, после того, как эти скорости выровняются, обе скорости будут уменьшаться с одинаковым средним значением.



2.2 Время выравнивания скоростей легко определить из закона изменения скорости поступательного движения (9):

$$\omega_0 R = V_0 - \mu g t_1 \quad \Rightarrow$$
$$t_1 = \frac{V_0 - \omega_0 R}{\mu g}\,, \tag{11}$$

2.3 Для расчета среднего ускорения при $V \approx v$ примем следующую модель: пусть скорость поступательного движения превышает скорость вращательного движения на малую величину ΔV, тогда эта скорость уменьшается с ускорением a_0 и достигает некоторого значения $v-\Delta v$ (на этом этапе скорость вращательного движения остается неизменной v) – длительность этого этапа

$$\tau_1 = \frac{\Delta V + \Delta v}{a_1}. \tag{12}$$

Скорость вращательного движения превысила скорость поступательного на величину Δv, поэтому она станет уменьшаться с ускорением a_1 и достигнет значения $V-\Delta V$, что произойдет за время

$$\tau_2 = \frac{\Delta v + \Delta V}{a_2}. \tag{13}$$

Таким образом, за время $(\tau_1+\tau_2)$ обе скорости уменьшились на величину $(\Delta V+\Delta v)$. Поэтому средние ускорения оказываются одинаковыми и равными

$$\langle a\rangle = \frac{\Delta V + \Delta v}{\tau_1+\tau_2} = \frac{\Delta V + \Delta v}{\dfrac{\Delta v+\Delta V}{a_1}+\dfrac{\Delta v+\Delta V}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_1+a_2} = \frac{2}{3}\mu g. \tag{14}$$

2.4 Теперь путь, который пройдет диск до остановки, легко рассчитать по известной кинематической формуле

$$S = \frac{V_0^2 - \left(\dfrac{V_0}{2}\right)^2}{2\mu g} + \frac{\left(\dfrac{V_0}{2}\right)^2}{2\cdot\dfrac{2}{3}\mu g} = \frac{9}{16}\frac{V_0^2}{\mu g}. \tag{15}$$