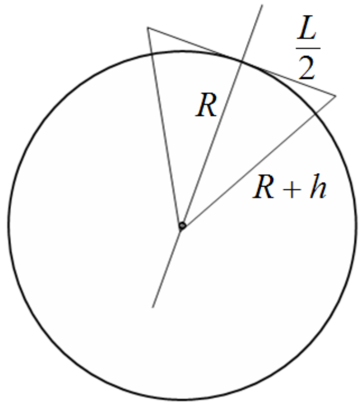
Задание 2. Как измеряли Вселенную. Решение.

Часть 1. Радиус Земли.



1.1 Элементарный построения условия видимости приводят к уравнению, следующему из теоремы Пифагора

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = (R+h)^2 - R^2 \approx 2Rh. \quad (1)$$

Мы пренебрегли малым слагаемым h^2. Из этой формулы следует, что радиус Земли равен

$$R = \frac{L^2}{8h}. \quad (2)$$

Численный подсчет дает результат

$$R \approx 6{,}3 \cdot 10^6\, м. \quad (3)$$

Часть 2. Масса Земли.

2.1 Из закона всемирного тяготения можно записать формулу для ускорения свободного падения

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}. \quad (4)$$

Из этой формулы находим массу Земли $M = \frac{g_0 R^2}{G} = 5{,}9 \cdot 10^{24}\, кг$.

Средняя плотность Земли равна

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3g_0}{4\pi RG} = 5{,}55 \cdot 10^3\, \frac{кг}{м^3} \quad (5)$$

Часть 3. Расстояние до Луны.

3.1 Расстояние от Земли до Луны можно найти r, рассматривая движение Луны с точки зрения законов динамики (2 закон Ньютона и закон всемирного тяготения):

$$m\omega^2 r = G\frac{mM}{r^2}. \quad (6)$$

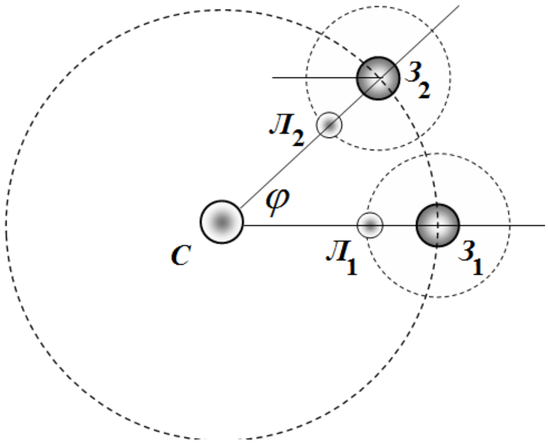
Где m - масса Луны, M - масса Земли, $\omega = \frac{2\pi}{T_Л}$ - угловая скорость движения Луны вокруг Земли. Для упрощения расчетов можно использовать формулу (4):

$$\left(\frac{2\pi}{T_Л}\right)^2 r = \frac{g_0 R^2}{r^2}. \quad (7)$$

Из этой формулы находим радиус лунной орбиты

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(\frac{2\pi}{T_Л}\right)^2}}. \qquad (8)$$

Теперь необходимо учесть, что время между двумя новолуниями не равно периоду обращения Луны вокруг Земли. Обозначим $T_З$ период обращения Земли вокруг Солнца (1 год). На рисунке показано положение Солнца, Земли и Луны в два последовательных новолуния. Очевидно, что время между полнолуниями (которые легче наблюдать) равно времени между новолуниями. За время между новолуниями τ Луна по своей орбите повернется на угол $\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_З}\tau\right)$, поэтому можно записать:



$$\tau = \frac{\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_З}\tau\right)}{\omega_Л} = \frac{\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_З}\tau\right)}{2\pi} T_Л. \qquad (9)$$

Из этой формулы следует, что период обращения Луны описывается формулой:

$$\frac{1}{T_Л} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_З}. \qquad (10)$$

Подставляя это выражение в формулу (8) получим

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(2\pi\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_З}\right)\right)^2}}. \qquad (11)$$

Для численных расчетов необходимо подставить все значения в системе СИ:

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(2\pi\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_З}\right)\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}81\frac{м}{с^2}\left(6{,}5\cdot 10^6 м\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600 с}\left(\frac{1}{29{,}5} + \frac{1}{365{,}25}\right)\right)^2}} = 3{,}9\cdot 10^8 м. \qquad (12)$$

Часть 4. Масса Солнца.

4.1 Запишем второй закон Ньютона (в совокупности с законом всемирного тяготения) для движения Земли

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = G\frac{mM}{R^2}. \qquad (13)$$

Где m - масса Земли, M - масса Солнца, R - радиус Земной орбиты, $T = 1\ год$ - период обращения Земли вокруг Солнца. Из этого уравнения выразим массу Солнца

$$M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R^3}{G}. \quad (14)$$

Радиус орбиты найдем из данных радиолокационных измерений

$$R = c\frac{\tau}{2}. \quad (15)$$

Окончательно для массы Солнца получим

$$M = \frac{1}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{c\tau}{2}\right)^3. \quad (16)$$

Подставим численные значения и вычислим

$$M = \frac{1}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{c\tau}{2}\right)^3 = \frac{1}{6{,}67\cdot 10^{-11}}\left(\frac{2\pi}{365{,}25\cdot 24\cdot 3600}\right)^2 \left(\frac{3\cdot 10^8\cdot 16{,}7\cdot 60}{2}\right)^3 = 2{,}0\cdot 10^{30}\,кг.$$