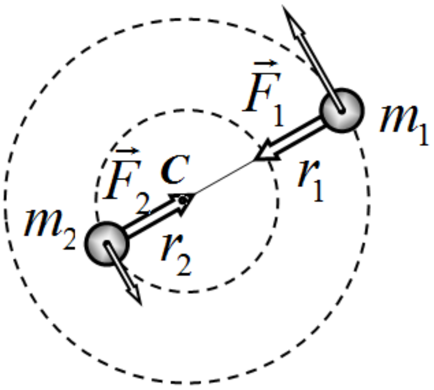
**11 класс.**

## Задача 11- 1. Разминка.

### Задача 1.1.

Сила взаимодействия между частицами центральная, то есть зависит только от расстояния между частицами и направлена вдоль прямой, соединяющей центры этих частиц.




Вращение частиц происходит вокруг их центра масс, который остается неподвижным, так как внешние силы отсутствуют. Полная энергия системы является суммой кинетической энергии частиц и потенциальной энергии их взаимодействия.

Кинетическая энергия частиц описывается формулой

$$E_k = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1r_1^2\omega^2}{2} + \frac{m_2r_2^2\omega^2}{2}. \qquad (1)$$

Где $r_1, r_2$ - радиусы орбит частиц, или расстояния от соответствующей частицы до центра масс.

В формуле (1) кинетическая энергия выражена через угловую скорость, так как она одинакова для обеих частиц, кроме того, она задана в условии задачи.

Фигурирующие в формуле (1) расстояния удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= r \\ m_1r_1 &= m_2r_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Второе уравнение следует из определения центра масс двух частиц.

Из уравнений (2) следует, что

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}r \\ r_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2}r \end{aligned}. \qquad (3)$$

Подставляя эти выражения в формулу для кинетической энергии (1), получим

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m_1r_1^2\omega^2}{2} + \frac{m_2r_2^2\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\left(m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}r\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}r\right)^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r^2\omega^2 \end{aligned} \qquad (4)$$

В данной задаче силами взаимодействия могут быть сила кулоновского электростатического взаимодействия и сила гравитационного взаимодействия (в условии не оговорено, что ею следует пренебречь). Для этих взаимодействий выполняется простое соотношение между модулем силы $F(r)$ и потенциальной энергией взаимодействия $U(r)$:

$$U(r) = -rF(r). \qquad (5)$$

Знак минус в этой формуле возникает из-за того, что результирующая сила взаимодействия есть сила притяжения (иначе бы описанное движение было невозможно!).

Для расчета потенциальной энергии запишем уравнение второго закона Ньютона для одной из частиц

$$m_1r_1\omega^2 = F(r) \qquad (6)$$

И умножим его на $r$, в результате чего получим:

$$rF(r) = m_1 r_1 \omega^2 r = m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \right) \omega^2 r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \omega^2 \qquad (7)$$

При выводе использована формула (3) для расстояния $r_1$.

Из полученного выражения следует (с учетом формул (4) и (5)), что потенциальная энергия взаимодействия отрицательна и по модулю в два раза больше энергии кинетической:

$$U = -2E_k \qquad (8)$$

Таким образом, полная энергия рассматриваемой системы оказывается равной:

$$E = U + E_k = -E_k = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \omega^2 . \qquad (9)$$

Если масса одной из частиц значительно превышает массу второй ($m_2 >> m_1$), то в формулу (9) можно записать в виде

$$E = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \omega^2 \approx -\frac{1}{2} m_1 r^2 \omega^2 . \qquad (10)$$

В этом приближении можно считать, что более тяжелая частица покоится, а более легкая вращается вокруг нее.

*Также отметим, что формула (9) обычно интерпретируется следующим образом: «задача двух тел», всегда может быть сведена к задаче движения одного тела с приведенной массой*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \textit{(11)}$$

*вокруг неподвижного центра.*

**Задача 1.2**

Приведенная в учебнике формула получена в приближении, что электрон в атоме водорода вращается вокруг неподвижного ядра (как водорода, так и дейтерия). Однако взаимодействующие частицы движутся вокруг общего центра масс.

В предыдущей задаче было показано, что учет этого обстоятельства приводит к тому, что в формуле для энергии вместо массы легкой частицы (в этой задаче – электрона) следует подставлять значение приведенной массы. Именно учет этой поправки приводит к тому, что энергии уровней, а, следовательно, и спектры этих изотопов различаются.

Рассчитаем приведенные массы для водорода и дейтерия (учитывая малость отношения массы электрона к массе протона)

Для водорода:

$$\mu_H = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \approx m_e \left( 1 - \frac{m_e}{m_p} \right) = m_e (1 - \beta); \qquad (1)$$

для дейтерия

$$\mu_D = \frac{2m_p m_e}{2m_p + m_e} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} \approx m_e \left( 1 - \frac{m_e}{2m_p} \right) = m_e \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right). \qquad (2)$$

Не сложно получить формулу для длины волны перехода, однако для расчета относительного сдвига это не требуется. Достаточно заметить, что рассматриваемая длина волны обратно пропорциональна приведенной массе. Действительно, энергия излучаемого фотона равна разности энергий уровней (которая пропорциональна приведенной массе).

Следовательно, частота излучения также пропорциональна приведенной массе, поэтому длина волны обратно пропорциональна ей. Итак,

$$\lambda = \frac{C}{\mu}. \tag{3}$$

Так как различие в приведенных массах мало, то и различие меду длинами волн также мало, поэтому можно записать приближенное выражение

$$\Delta\lambda = -\frac{C}{\mu^2}\Delta\mu. \tag{4}$$

А для относительных величин

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\mu}{\mu}. \tag{5}$$

Подставляя найденные значения приведенных масс, получим требуемый результат:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_D - \lambda_H}{\lambda_H} = -\frac{\mu_D - \mu_H}{\mu_H} = -\frac{m_e\left(1-\dfrac{\beta}{2}\right) - m_e(1-\beta)}{m_e(1-\beta)} \approx -\frac{\beta}{2} = -2{,}7\cdot 10^{-4} \tag{6}$$

То есть все длины волн в спектре дейтерия оказываются примерно на три сотых процента меньше длин волн в спектре обычного водорода: и этот изотопический сдвиг точно измерен!