Задача 11-3 Преломление… звука

Часть 1. Скорость звука в воздухе.

1.1 Подставим размерности величин, входящих в формулу для скорости звука

$$c = AP^{\alpha}\rho^{\beta} \qquad (1)$$

И запишем условия совпадения размерностей:

$$\left[м \cdot c^{-1}\right] = \left[\frac{кг \cdot м}{c^2 \cdot м^2}\right]^{\alpha}\left[\frac{кг}{м^3}\right]^{\beta} = \left[кг\right]^{\alpha+\beta}\left[м\right]^{-\alpha-3\beta}\left[c\right]^{-2\alpha} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = 0 \\ &-\alpha - 3\beta = 1 \\ &-2\alpha = -1 \end{aligned} \qquad (3)$$

Решение этой системы имеет вид

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = -\alpha = -\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Следовательно, формула для скорости звука следующая:

$$c = A\sqrt{\frac{P}{\rho}}. \qquad (5)$$

1.2 Из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M}RT \qquad (6)$$

следует, что

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R}{M}T. \qquad (7)$$

Поэтому зависимость скорости звука от температуры описывается формулой

$$c = A\sqrt{\frac{P}{\rho}} = A\sqrt{\frac{R}{M}T}. \qquad (8)$$

1.3 Подставим указанное выражение для температуры и преобразуем его

$$c = A\sqrt{\frac{R}{M}T} = A\sqrt{\frac{R}{M}\left(T_0 + \Delta T\right)} = A\sqrt{\frac{R}{M}T_0}\sqrt{1+\frac{\Delta T}{T_0}} = c_0\sqrt{1+\frac{\Delta T}{T_0}}. \qquad (9)$$

Здесь $c_0 = A\sqrt{\frac{R}{M}T_0}$ - скорость звука при температуре T_0.

Часть 2. Распространение звука в неоднородно нагретой атмосфере.

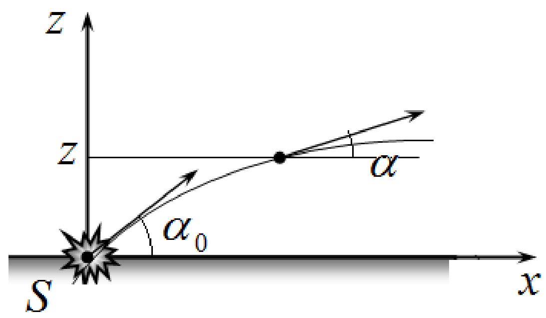
2.1 Если температура воздуха изменяется с высотой, то соответственно изменяется и скорость звука, причем эта зависимость описывается формулой

$$T = T_0 + \gamma z \quad \Rightarrow \quad c = c_0\sqrt{1+\frac{\gamma}{T_0}z} \qquad (10)$$

Известный закон преломления света является следствием его волновых свойств, поэтому его можно обобщить на любые волновые процессы. Это можно доказать, например, используя принцип Гюйгенса. Изменение скорости распространения волны в оптике принято описывать, вводя показатель преломления среды. По аналогии со светом можно ввести «звуковой» показатель преломления.

При температуре T_0 показатель преломления будем считать равным 1, тогда зависимость показателя преломления от высоты имеет вид

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma}{T_0} z}} \qquad (11)$$

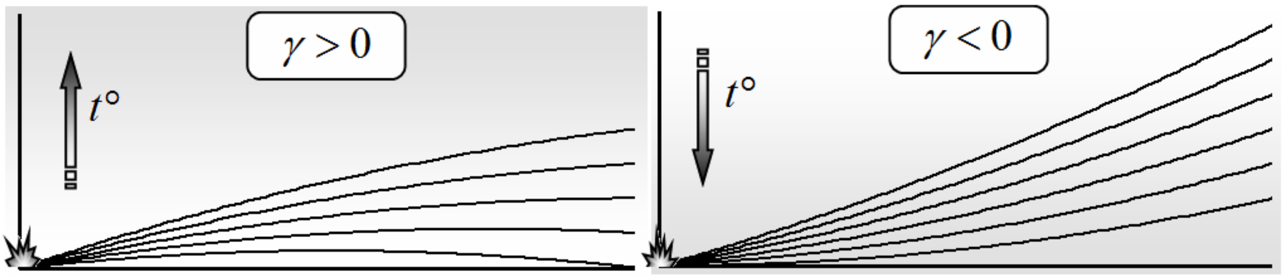


При заданном определении показателя преломления, закон преломления звука будет иметь вид

$$n \cos\alpha = \cos\alpha_0 . \qquad (12)$$

Здесь α - угол между звуковым лучом и горизонтом.

Используя этот закон и выражение (11) для зависимости показателя преломления от высоты, можно указать качественное поведение звуковых лучей. Если температура воздуха возрастает с высотой ($\gamma > 0$), то показатель преломления убывает – в этом случае звуковые лучи, преломляясь, изгибаются вниз. Некоторые из них даже могут достичь поверхности земли (см. рис). В противном случае ($\gamma < 0$) – лучи изгибаются вверх. Отметим, что именно эта ситуация чаще встречается в атмосфере.



2.2 При заданных условиях зависимость скорости звука от высоты имеет вид

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{T_0} z} = c_0 \sqrt{1 + \beta z} \qquad (12)$$

Численные значения параметров в этой формуле равны

$$c_0 = 340 \frac{м}{с} . \qquad (13)$$

$\gamma = \frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{-1{,}0 K}{100 м} = -1{,}0 \cdot 10^{-2} \frac{K}{м}$, следовательно.

$$\beta = \frac{\gamma}{T_0} = -1{,}0 \cdot 10^{-2} \frac{K}{м} \frac{1}{293 K} = -3{,}4 \cdot 10^{-5} м^{-1} . \qquad (14)$$

2.3 Уравнение параболы, проходящей через начало координат, в общем виде задается функцией

$$z = ax^2 + bx . \qquad (15)$$

2.4 Производная от функции (15) равна

$$z' = 2ax + b \qquad (16)$$

В это выражение следует подставить значение x, выраженное через z. Для зависимости $z(x)$ надо решить уравнение

$$ax^2 + bx - z = 0 . \qquad (17)$$

Из которого следует, что

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4az}}{2a} \qquad (18)$$

Подставляя это выражение в формулу (16), получим

$$z' = \pm\sqrt{b^2 + 4az}\,. \tag{19}$$

Два значения производной соответствуют двум ветвям параболы, т.е. при $x > 0$ следует брать положительный корень, при $x < 0$ - отрицательный. Таким образом, если производная от функции описывается уравнением (19), то его решение при нулевых начальных условиях есть функция (15)

2.5 Для расчета траектории луча $z(x)$ воспользуемся законом преломления

$$n\cos\alpha = \cos\alpha_0 \tag{20}$$

В котором зависимость показателя преломления от высоты задается функцией

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+\beta z}} \tag{21}$$

Согласно определению угла α, его тангенс равен производной от искомой функции $z(x)$. Значение тангенса угла найдем с помощью тригонометрических формул

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{n^2}{\cos^2\alpha_0} - 1} = \sqrt{\frac{n^2 - 1 + \left(1 - \cos^2\alpha_0\right)}{\cos^2\alpha_0}} = \sqrt{tg^2\alpha_0 + \frac{n^2 - 1}{\cos^2\alpha_0}}\,. \tag{22}$$

Нам требуется найти приближенное уравнение траектории (в квадратичном приближении). Для этого достаточно подкоренное упростить с помощью приближенных формул, считая z (точнее βz) и α малыми величинами и, оставляя в них только первый порядок. В этом приближении

$$\frac{n^2 - 1}{\cos^2\alpha_0} \approx \frac{1}{1+\beta z} - 1 \approx (1 - \beta z) - 1 = -\beta z\,. \tag{23}$$

Тогда уравнение для траектории луча приобретает вид

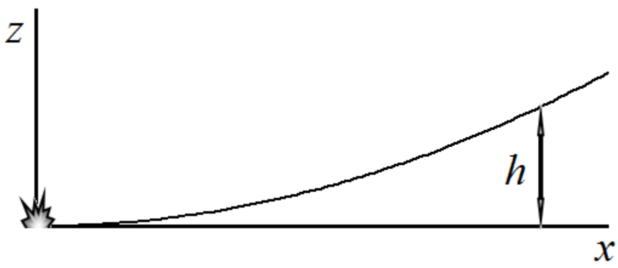
$$z' = \sqrt{\alpha_0^2 - \beta z}\,, \tag{24}$$

который совпадает с уравнением (19). Поэтому решение этого уравнения задается функцией

$$z = -\frac{\beta}{4}x^2 + \alpha_0 x \tag{25}$$

Так как параметр $\beta < 0$, то ветви параболы оказываются направленными вверх – звук «уходит» ввысь!

2.6 Звуковые лучи, выходящие из источника под разными углами α_0 являются параболами с одним коэффициентом при x^2, поэтому самая «нижняя» парабола есть луч вышедший горизонтально $(\alpha_0 = 0)$. Поэтому для определения расстояния, на котором луч проходит на высоте h необходимо решить уравнение



$$h = -\frac{\beta}{4}x^2\,, \tag{26}$$

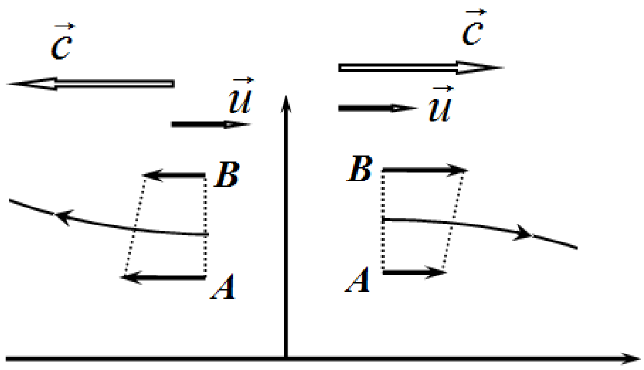
из которого находим

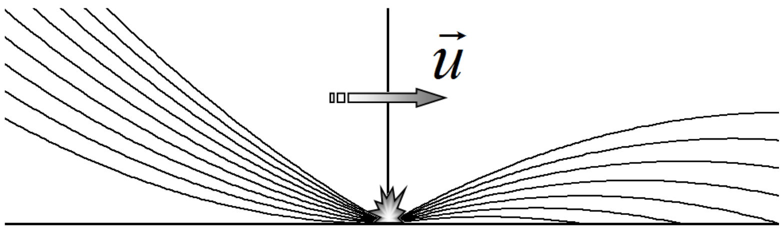
$$x = \sqrt{-\frac{4h}{\beta}} = \sqrt{\frac{4\cdot 2{,}0\,м}{3{,}4\cdot 10^{-5}\,м^{-1}}} = 0{,}49\cdot 10^{-3}\,м\,. \tag{27}$$

Заметим, что на больших расстояниях не будет слышен звук даже от мощного источника (например, взрыва), потому что звуковые волны уходят вверх. Дифракцией звуковых волн в данной задаче пренебрегаем.

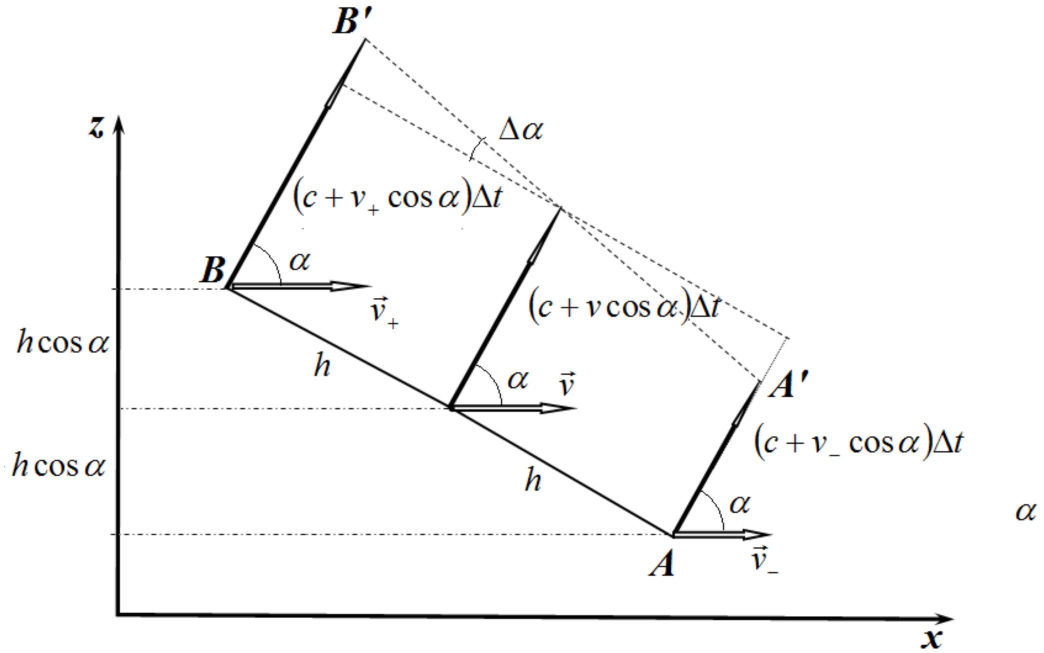
Часть 3. Не кричите против ветра!

3.1 При наличии ветра скорость распространения звука зависит от направления (можно сказать, что среда является анизотропной). Поэтому закон преломления в форме (12) применять нельзя. В таком случае оказывается удобным рассматривать изменение волновых поверхностей (фронтов) – поверхностей, которые звуковые лучи пересекают нормально. Рассмотрим участок волнового фронта AB, распространяющегося приблизительно по направлению ветра. Так как скорость ветра возрастает с высотой, то верхняя часть фронта будет смещаться быстрее нижней, поэтому лучи нормальные к этому фронту будут отклоняться вниз. При распространении звука против ветра ситуация обратная – верхняя часть фронта движется медленнее, поэтому в этом случае лучи отклоняются вверх. Аналогичная ситуация будет реализовываться и для других лучей: при движении по ветру они отклоняются вниз (прижимаются к земле), при распространении против ветра лучи отклоняются вверх.





3.2 Опишем «поворот» волнового фронта более подробно.



Рассмотрим луч, распространяющийся на высоте z под углом α к горизонту. Изобразим участок волнового фронта AB шириной $2h$. Согласно подсказке, сделанной в условии задачи скорость фронта равна сумме скоростей звука в неподвижном воздухе и нормальной составляющей скорости ветра, поэтому скорость смещения точек фронта равна

$$c' = c + v\cos\alpha\,. \tag{28}$$

Только необходимо учесть, что разные точки фронта находятся на разной высоте, поэтому они движутся с разной скоростью. Потому, что скорость ветра зависит от высоты - $v(z) = v_0 + \beta z$. Крайние точки выбранного участка фронта смещены относительно его середины на величину $\Delta z = h\cos\alpha$. Поэтому скорости ветра в этих точках равны

$$v_\pm = v_0 \pm \beta h\cos\alpha\,, \tag{29}$$

где v_0 - скорость ветра на высоте z . За малый промежуток времени Δt смещения крайних точек задаются выражениями

$$\Delta S_\pm = (c + v_\pm \cos\alpha)\Delta t\,. \tag{30}$$

Из рисунка следует, что различие скоростей движения этих точек приведет к повороту фронта на угол

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= -\frac{(c + v_+ \cos\alpha)\Delta t - (c + v_- \cos\alpha)\Delta t}{2h} = -\frac{(v_+ - v_-)\cos\alpha\Delta t}{2h} = \\ &= -\frac{2\beta h\cos^2\alpha\cdot\Delta t}{2h} = -\beta\cos^2\alpha\cdot\Delta t\end{aligned}\,. \tag{31}$$

За тот же промежуток времени центр выбранного участка сместится по высоте на величину

$$\Delta z = (c + v_0\cos\alpha)\sin\alpha\cdot\Delta t \approx c\sin\alpha\cdot\Delta t \tag{32}$$

Здесь учтено, что $v << c$

Следовательно, уравнение, описывающее изменение угла α имеет вид

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta z} = -\frac{\beta\cos^2\alpha}{c\sin\alpha}\,. \tag{33}$$

3.3 В рамках использованного приближения уравнение (33) преобразуется к виду

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta z} = -\frac{\beta\cos^2\alpha}{c\sin\alpha} \approx -\frac{\beta}{c\cdot\alpha}\,. \tag{34}$$

Из которого не сложно найти зависимость $\alpha(z)$ с учетом начальных условий:

$$\alpha\Delta\alpha = -\frac{\beta}{c}\Delta z \quad\Rightarrow\quad \Delta\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) = -\frac{\beta}{c}\Delta z \quad\Rightarrow\quad \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2} = -\frac{\beta}{c}z \tag{35}$$

Окончательно получаем

$$\alpha = \sqrt{\alpha_0^2 - 2\frac{\beta}{c}z}\,. \tag{35}$$

<u>Для скептиков</u>, сомневающихся в мощи приближенных методов. Уравнение (33) может быть решено точно

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{\beta\cos^2\alpha}{c\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha = -\frac{\beta}{c}dz \quad\Rightarrow\quad \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha = -\frac{\beta}{c}z$$

Этот интеграл выражается через элементарные функции

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha = -\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d(\cos\alpha)}{\cos^2\alpha} = \left.\frac{1}{\cos\alpha}\right|_{\alpha_0}^{\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha_0}$$

Далее необходимо выразить в явном виде $\cos\alpha$*, провести тригонометрические преобразования типа (22) и … получить уравнение (35)!*

Как обычно – не понимаешь физики – сиди и интегрируй!

Вернемся, однако, к уравнению (35). Так как при малых углах α, угол равен производной $z'(x)$, то это уравнение совпадает с уравнением (24), поэтому его решением является функция

$$z = -\frac{\beta}{2}x^2 + \alpha_0 x \tag{36}$$

Таким образом, при распространении звука по ветру лучи представляют собой параболы, ветви которых направлены к земле.

При распространении звука против ветра необходимо поменять знак в уравнении (33), соответственно поменяется знак и решении, т.е. в этом случае лучи будут описываться функциями

$$z = +\frac{\beta}{2}x^2 + \alpha_0 x \tag{37}$$

Отметим, что в этом случае $x < 0$, но и $\alpha_0 < 0$.

Полученные результаты корректно описывают ход лучей, построенных в результате качественного анализа.

3.5 Итак, причиной того, что звук лучше распространяется по ветру является преломление звуковых лучей, в этом случае они «прижимаются» к земле и являются слышимыми. В противоположном направлении лучи уходят вверх и минуют уши слушателей. Также существенно, что, как правило, скорость ветра возрастает с высотой (вблизи поверхности скорость ветра меньше из-за влияния вязкого трения о поверхность земли).

Изменение скорости распространения звука по и против ветра никакой роли не играет: во-первых, скорость ветра мала по сравнению со скоростью звука; во-вторых, не принципиально услышите ли вы раньше или позже на несколько миллисекунд!