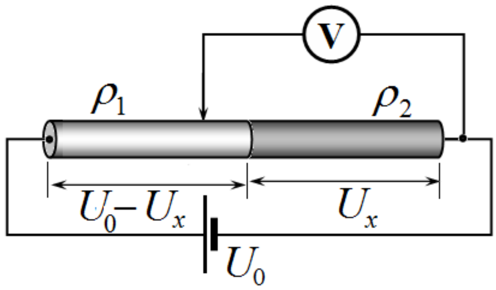
Задача 9-3 Напряжения

Часть 1. Электрическое напряжение.

1.1 Так как сила тока в любом поперечном сечении стержня постоянна, то напряжение будет изменяться по линейному закону. Причем при $x = 0$ напряжение равно напряжению источника U_0, при $x = 0$ напряжение становится равным нулю. Этим условиям удовлетворяет линейная функция

$$U = U_0\left(1 - \frac{x}{L}\right). \qquad (1)$$

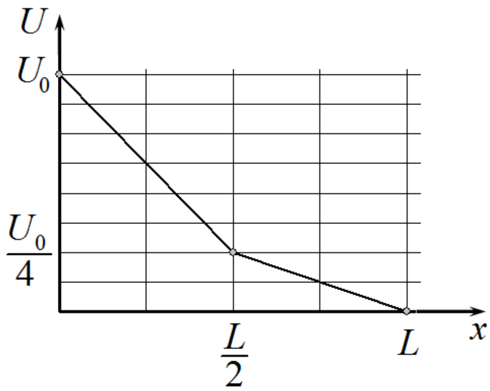
1.2 В пределах каждого стержня напряжение меняется по линейному закону. Поэтому для построения графика необходимо найти напряжение на втором стержне, которое мы обозначим U_x. Тогда напряжение на первом стержне будет равно $(U_0 - U_x)$. Значения сил токов в обоих стержнях одинаково, что выражается уравнением



$$\frac{U_0 - U_x}{\rho_1 \frac{L}{2} S} = \frac{U_x}{\rho_2 \frac{L}{2} S}. \qquad (2)$$

Принимая во внимание отношение между удельными сопротивлениями стержней, из уравнения (2) получаем

$$U_0 - U_x = \frac{\rho_1}{\rho_2} U_x = 3U_x \quad \Rightarrow \quad U_x = \frac{U_0}{4}. \qquad (2)$$



Таким образом, на участке $x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ напряжение линейно уменьшается от U_0 до $\frac{U_0}{4}$, а на участке $x \in \left[\frac{L}{2}, L\right]$ падает до нуля. График этой функции показан на рисунке.

Часть 2. «Температурное» напряжение.

Решение этой части задачи полностью аналогично решению части 1.

2.1 В установившемся режиме поток теплоты через любое поперечное сечение стержня постоянен, поэтому зависимость температуры стрежня от координаты линейна и описывается функцией

$$t = t_0\left(1 - \frac{x}{L}\right). \qquad (3)$$

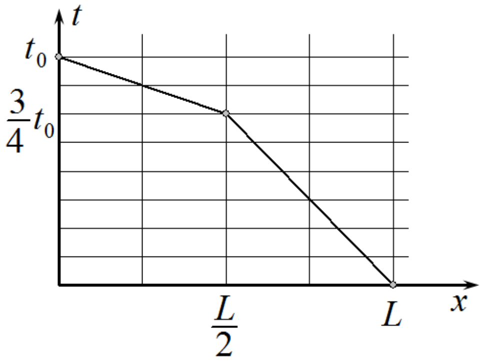
2.2 В пределах каждого цилиндра температура изменяется по линейному закону. Для определения температуры на стыке цилиндров запишем условие равенства потоков в обоих цилиндрах

$$\gamma_1 \frac{t_0 - t_x}{L/2} S = \gamma_2 \frac{t_x}{L/2} S. \qquad (4)$$

Из этого уравнения находим

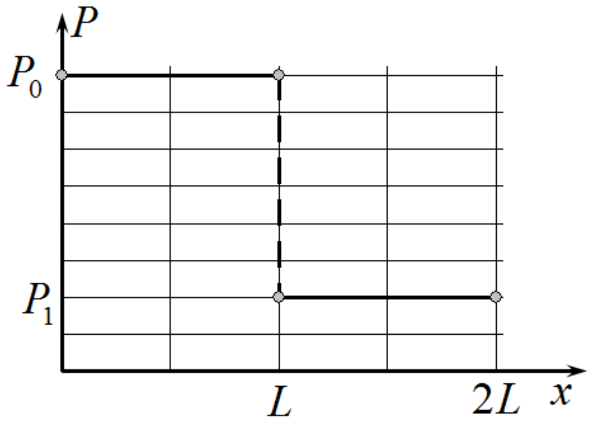
$$t_0 - t_x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} t_x = \frac{1}{3} t_x \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{3}{4} t_0 . \qquad (5)$$

График зависимости температуры от координаты показан на рисунке.



Часть 3. «Жидкое» напряжение.

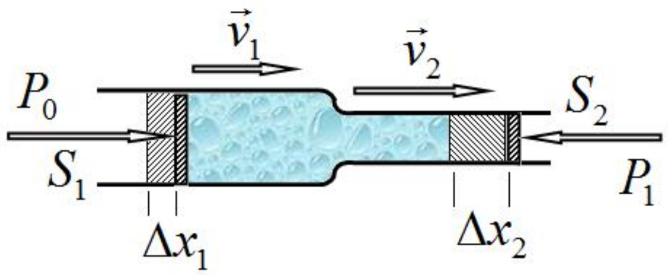
3.1 При движении идеальной жидкости отсутствуют силы вязкого трения, поэтому при ее движении по трубе постоянного сечения нет необходимости прикладывать к жидкости внешнюю силу. Следовательно, в этом случае давление жидкости в трубе является постоянным. Однако, при перетекании жидкости из трубы одного сечения в трубу другого сечения изменяется скорость течения жидкости. Таким образом, на участке переменного сечения должна действовать сила давления, которая сообщает жидкости ускорение и изменяет ее скорость. Эта сила создается скачком давления на стыке труб. Из этих рассуждений следует, что в левой части трубы давление равно P_0, а во второй - P_1. График такой зависимости показан на рисунке.



Для того, чтобы найти расход жидкости необходимо связать скачок давления со скоростями жидкости. Для установления этой связи проще всего рассмотреть изменение энергии жидкости при ее перетекании из одной трубы в другую.

Мысленно выделим два сечения в обеих частях трубы. Пусть в левой части трубы это сечение сместилось на расстояние Δx_1, а в правой части - Δx_2. Так как жидкость не сжимаема, то эти смещения связаны очевидным соотношением (условие постоянства объема):

$$S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2 . \qquad (6)$$



Если разделить данное соотношение на интервал времени, в течение которого произошло рассматриваемое смещение, получим аналогичное соотношение для скоростей жидкости в обеих частях трубы

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 . \qquad (7)$$

При смещении жидкости силы давления совершили работу

$$A_P = P_0 S_1 \Delta x_1 - P_1 S_2 \Delta x_2 = (P_0 - P_1) S_1 \Delta x_1 \qquad (8)$$

При этом масса жидкости, равная $\Delta m = \rho S_1 \Delta x_1$, изменила свою скорость от v_1 до v_2.

Изменение кинетической энергии этой жидкости равно работе сил давления, поэтому

$$\frac{\rho S_1 \Delta x_1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = (P_0 - P_1) S_1 \Delta x_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = (P_0 - P_1) \qquad (9)$$

Отметим, что полученное соотношение называется уравнением Бернулли.

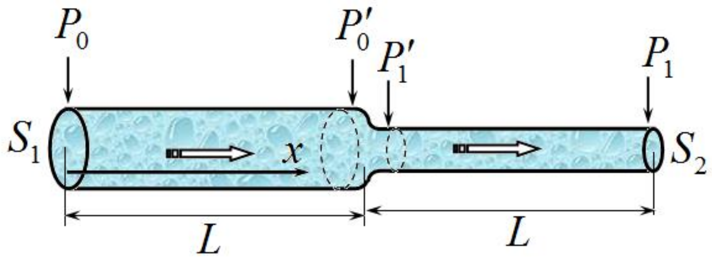
Из соотношения (7) следует, что $v_2 = \frac{S_1}{S_2}v_1 = 2v_1$. Теперь не сложно определить скорость жидкости в левой части трубы:

$$\frac{\rho}{2}\left(4v_1^2 - v_1^2\right) = \left(P_0 - P_1\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{P_0 - P_1}{\rho}}\,. \tag{10}$$

Тогда расход жидкости через трубу оказывается равным

$$q = S_1 v_1 = 2S_0 v_1 \sqrt{\frac{2}{3}\frac{P_0 - P_1}{\rho}}\,. \tag{11}$$

3.2 Для того, чтобы вязкая жидкость протекала по трубе постоянного сечения, к концам трубы необходимо прикладывать разность давлений, чтобы преодолеть силы вязкого трения. Поэтому при стационарном течении в трубе должно установиться следующее распределение давлений (см. рис.). В пределах левой части трубы давление падает пол линейному закону от P_0 до некоторого значения P_0'. Разность этих давлений обусловлена необходимостью преодоления сил вязкого трения в этой части трубы. В области стыка должна существовать разность давлений $\left(P_0' - P_1'\right)$, обеспечивающая увеличение скорости течения жидкости. Наконец, на правом участке давление линейно уменьшается от P_1' до значения P_1. Из формулы Пуазейля следует, что расход жидкости пропорционален разности давлений и квадрату (!) площади поперечного сечения. Так как расход жидкости в любом сечении постоянен, а площадь правой части в 2 раза меньше площади левой части, то разность давлений на правой части трубы должна быть в 4 раза больше, чем на левой части трубы.



$$\left(P_1' - P_1\right) = 4\left(P_0 - P_0'\right). \tag{12}$$

Расчет скачка давлений может быть произведен аналогично тому. Как это было сделано для идеальной жидкости. Однако, этот расчет требует учета того, что при течении вязкой жидкости скорость ее течения не постоянна по поперечному сечению. Схематический вид зависимости давления в жидкости от координаты показан на рисунке. Существенно, что коэффициент наклона графика на втором участке в 4 раза больше, чем на первом.