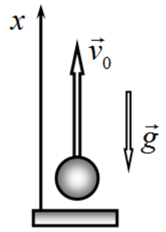
Задание 1. Разминка.

Задача 1.1



1.1.1 Так как движение происходит с постоянным ускорением, то закон движения шара имеет вид:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

1.1.2 Для расчета времени движения, следует решить уравнение

$$h = v_0 \tau - \frac{g\tau^2}{2}, \quad (2)$$

Которое перепишем в традиционном для квадратных уравнений виде:

$$\tau^2 - 2\frac{v_0}{g}\tau + \frac{2h}{g} = 0. \quad (3)$$

1.1.3 Дискриминант этого уравнения равен

$$D = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g} \quad (4)$$

При положительном значении дискриминанта, т.е. при

$$D = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g} > 0 \quad \Rightarrow \quad h < \frac{v_0^2}{2g}. \quad (5)$$

Квадратное уравнение (3) имеет два корня. Физический смысл этого очевиден: шарик будет находиться на высоте h два раза: при движении вверх и при движении вниз.
При

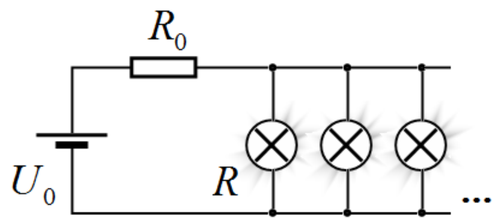
$$D = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g} < 0 \quad \Rightarrow \quad h > \frac{v_0^2}{2g} \quad (6)$$

уравнение (3) решений не имеет, что означает, что шарик не поднимется на такую высоту.

1.1.4 Наконец, при $D = 0$ уравнение имеет единственное решение. При этом величина h принимает максимальное значение

$$S_{\max} = \frac{v_0^2}{2a}. \quad (7)$$

Задача 1.2.



1.2.1 Так как сопротивления всех лампочек одинаковы, то при их параллельном соединении общее сопротивление гирлянды будет равно

$$r = \frac{R}{n}. \quad (1)$$

В этом случае мощность гирлянды будет равна

$$P = I^2 r = \frac{U_0^2}{(R_0 + r)^2} r. \quad (2)$$

Для расчета сопротивления гирлянды следует решить квадратное уравнение:

$$\begin{gathered} P = \frac{U_0^2}{(R_0 + R)^2} r \quad \Rightarrow \quad (R_0 + r)^2 = \frac{U_0^2}{P} r \quad \Rightarrow \\ R^2 + 2r\left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P}\right) + R_0^2 = 0 \end{gathered} . \quad (3)$$

Это уравнение имеет два корня, если его дискриминант положительный:

$$D = \left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P}\right)^2 - R_0^2 = \left(\frac{U_0^2}{2P}\right)^2 - \frac{U_0^2}{P} R_0 = \frac{U_0^2}{2P}\left(\frac{U_0^2}{2P} - 2R_0\right) > 0. \quad (4)$$

В этом случае корнями уравнения (2) являются

$$R_{1,2} = -\left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P}\right) \pm \sqrt{\frac{U_0^2}{2P}\left(\frac{U_0^2}{2P} - 2R_0\right)}. \quad (5)$$

Поэтому число лампочек, при котором мощность принимает найденное значение должно быть равно

$$n_{1,2} = \left[\frac{R_{1,2}}{R}\right] = \left[\frac{-\left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P}\right) \pm \sqrt{\frac{U_0^2}{2P}\left(\frac{U_0^2}{2P} - 2R_0\right)}}{n}\right]. \quad (6)$$

Здесь квадратные скобки $[\ldots]$ означают целую часть числа. Строго говоря, абсолютно точный ответ на поставленный вопрос может быть получен только при дискретном наборе требуемых мощностей, так как число лампочек – целое число.

1.2.2 При максимальной мощности гирлянды дискриминант уравнения (3) равен нулю, поэтому

$$D \frac{U_0^2}{2P_{\max}}\left(\frac{U_0^2}{2P_{\max}} - 2R_0\right) = 0. \quad (7)$$

Откуда следует, что

$$\left(\frac{U_0^2}{2P_{\max}} - 2R_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = \frac{U_0^2}{4R_0}. \quad (8)$$

Как следует, из формулы (4) эта мощность достигается, если сопротивление нагревателя равно

$$R = -\left(R_0 - \frac{U_0^2}{2P_{\max}}\right) = R_0\,. \qquad (9)$$

Итак, сопротивление гирлянды должно быть равно $R_0 = 15{,}5\,Ом$. Следовательно, в гирлянду надо включить

$$n = \frac{R_0}{R} = \frac{20{,}0}{1{,}2} = 16{,}7\,. \qquad (10)$$

Не целое число лампочек включать в цепь не рекомендуется. Поэтому необходимо рассчитать мощности гирлянды при двух ближайших к 16,7 значений числа лампочек по формуле

$$P = \frac{U_0^2}{\left(R_0 + \dfrac{R}{n}\right)^2}\frac{R}{n}\,. \qquad (11)$$

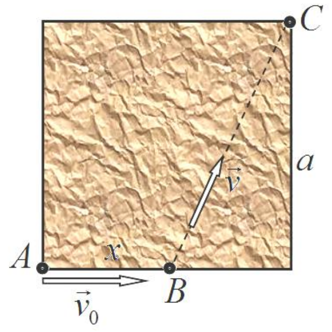
Численные значения этих мощностей равны:

$$\begin{aligned} P_{16} &= 16{,}868\,Вт \\ P_{17} &= 16{,}873\,Вт \end{aligned}\,. \qquad (12)$$

Таким образом, окончательный ответ задачи:
Максимальная мощность гирлянды равна $P = 16{,}873\,Вт \approx 16{,}9\,Вт$ при числе лампочек $n = 17$.

Примечание. Учитывая, что исходные численные значения приведены с точностью до 0,1, то с данной точностью найденная мощность реализуется при числе лампочек от 15 до 19.

Задача 1.3.



1.3.1 Запишем выражение для времени движения при произвольном значении x:

$$t = \frac{x}{v_0} + \frac{n\sqrt{a^2 + (a-x)^2}}{v_0}. \qquad (1)$$

Для определения минимума этой функции воспользуемся уже апробированной методикой. Сформулируем обратную задачу: при каком значении x время движения будет равно t? Для ответа на этот вопрос надо решить уравнение (1), считая неизвестной величиной x. Преобразуем это уравнение:

$$t = \frac{x}{v_0} + \frac{n\sqrt{a^2 + (a-x)^2}}{v_0} \Rightarrow$$
$$(tv_0 - x)^2 = n^2\left(a^2 + (a-x)^2\right) \Rightarrow \left((tv_0 - a) + (a-x)\right)^2 = n^2\left(a^2 + (a-x)^2\right) \qquad (2)$$

Для упрощения алгебраических выкладок, обозначим $(a-x) = z$, $(tv_0 - a) = b$. Тогда уравнение упростится:

$$\left((tv_0 - a) + (a-x)\right)^2 = n^2\left(a^2 + (a-x)^2\right) \Rightarrow$$
$$(b+z)^2 = n^2\left(a^2 + z^2\right) \Rightarrow (n^2-1)z^2 - 2bz + n^2a^2 - b^2 = 0 \qquad (3)$$

Приравняем дискриминант этого уравнения к нулю. В этом случае уравнение (3), а следовательно, и уравнение (2) будут иметь единственное решение, при котором время t минимально:

$$D = 4b^2 - 4(n^2-1)(n^2a^2 - b^2) = 0. \qquad (4)$$

Это условие выполняется при $b = \pm a\sqrt{n^2-1}$. Следует выбрать положительный корень, по смыслу параметра b. Теперь легко находим единственный корень уравнения (3):

$$z = \frac{b}{n^2-1} = \frac{a}{\sqrt{n^2-1}}. \qquad (5)$$

Окончательно получаем, что минимальное время движения достигается при

$$x = a - z = a - \frac{a}{\sqrt{n^2-1}}. \qquad (6)$$