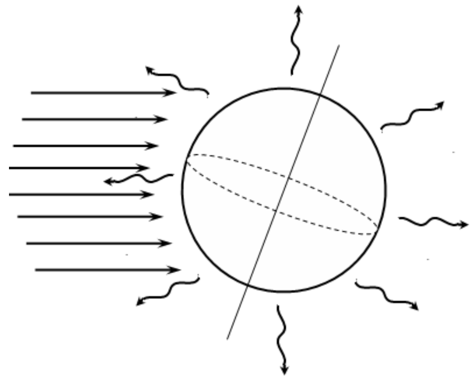
Задача 11-3 Почему январь холоднее декабря?

Часть 1. Средняя температура.

Необходимо использовать условие теплового баланса: количество энергии, поступающей от Солнца, равно энергии, испускаемой Землей. Только необходимо учесть, что энергия от Солнца поступает с одной стороны, а Землей излучается во все стороны. С учетом этого обстоятельства получим уравнение



$$q_0 \cdot \left(\pi R^2\right) = \sigma T^4 \cdot \left(4\pi R^2\right) \qquad (1)$$

Из которого следует, что средняя температура оценивается выражением

$$\overline{T} = \sqrt[4]{\frac{q_0}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1{,}4 \cdot 10^3}{4 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-8}}} \approx 280K \qquad (2)$$

Часть 2. Лирическое отступление.

2.1 Для того, чтобы найти время задержки необходимо найти закон изменения скорости тела со временем. Для этого надо использовать уравнение второго закона Ньютона

$$ma = F_0 \cos \omega t - \beta v \qquad (3)$$

Чтобы уменьшить число параметров перепишем это уравнение в виде

$$a + \gamma v = f_0 \cos \omega t\ , \qquad (4)$$

Где обозначено $\gamma = \dfrac{\beta}{m}$, $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$. Теперь воспользуемся подсказкой. Зависимость скорости от времени описывается функцией

$$v = v_0 \cos \omega(t - \tau), \qquad (5)$$

которую при $\omega\tau << 1$ можно упростить, используя приближенные формулы $\sin \omega\tau \approx \omega\tau, \cos \omega\tau \approx 1$:

$$\begin{aligned} v &= v_0 \cos \omega(t-\tau) = v_0 \cos(\omega t - \omega\tau) = v_0 \left(\cos \omega t \cdot \cos \omega\tau + \sin \omega t \cdot \sin \omega\tau\right) \approx \\ &\approx v_0 \left(\cos \omega t + \omega\tau \sin \omega t\right) \end{aligned}. \qquad (6)$$

В этом же приближении ускорение тела описывается функцией

$$a = \omega v_0 \left(-\sin \omega t + \omega\tau \cos \omega t\right). \qquad (7)$$

Подставим выражения для скорости и ускорения в уравнение (4):

$$\omega v_0\left(-\sin\omega t+\omega\tau\cos\omega t\right)+\gamma v_0\left(\cos\omega t+\omega\tau\sin\omega t\right)=f_0\cos\omega t. \qquad (8)$$

Чтобы это равенство выполнялось в любой момент времени, необходимо выполнение условий (приравниваем коэффициент при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$):

$$\begin{gathered}-\omega+\gamma\cdot\omega\tau=0\\ \left(\omega^2\tau+\gamma\right)v_0=f_0\end{gathered}. \qquad (9)$$

Из этих формул находим требуемые величины

Время задержки

$$\tau=\frac{1}{\gamma}=\frac{m}{\beta}, \qquad (10)$$

Амплитуда скорости (с учетом $\omega\tau<<1$)

$$v_0=\frac{f_0}{\omega^2\tau+\gamma}=\frac{f_0}{\omega^2\tau+\frac{1}{\tau}}=\tau f_0=\frac{f_0}{\gamma}=\frac{F_0}{\beta}. \qquad (11)$$

<u>Дополнение для скептиков</u>. Не трудно найти и точное решение (4).

Если зависимость скорости от времени описывается функцией

$$v=v_0\cos\omega(t-\tau),$$

То ускорение меняется со временем по закону

$$a=-v_0\omega\sin\omega(t-\tau).$$

Подставим эти выражения в уравнение движения:

$$\gamma v_0\cos\omega(t-\tau)-v_0\omega\sin\omega(t-\tau)=f_0\cos\omega t.$$

Левую часть этого уравнения преобразуем традиционным способом

$$\begin{aligned}&v_0\cos\omega(t-\tau)-v_0\omega\sin\omega(t-\tau)=\\&=v_0\sqrt{\gamma^2+\omega^2}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}\cos\omega(t-\tau)-\frac{\omega}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}\sin\omega(t-\tau)\right)=\\&=v_0\sqrt{\gamma^2+\omega^2}\cos\left(\omega(t-\tau)+\varphi\right)\end{aligned}$$

Где сдвиг фаз определяется, как $\varphi=arctg\frac{\omega}{\gamma}$. *Чтобы уравнение (7) обращалось в верное тождество при любом* t, *необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$\begin{gathered}\varphi-\omega\tau=0\\ v_0\sqrt{\gamma^2+\omega^2}=f_0\end{gathered}.$$

Откуда следует, что амплитуда изменения скорости частицы равна

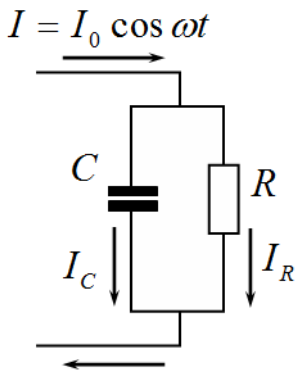
$$v_0=\frac{f_0}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{\beta^2+(m\omega)^2}}.$$

А время задержки между максимумом силы и максимумом скорости равно

$$\tau=\frac{\varphi}{\omega}=\frac{1}{\omega}arctg\frac{\omega}{\gamma}=\frac{1}{\omega}arctg\frac{m\omega}{\beta}.$$

Полагая $\omega\tau<<1$, *получим выведенные ранее приближенные формулы.*

2.2 Конденсатор с утечкой можно представить, как параллельно соединенные резистор и конденсатор (см. рисунок).



В этой цепи суммарная сила тока равна сумме сил токов через резистор и конденсатор:

$$I = I_R + I_C \,. \tag{12}$$

Сила тока через резистор подчиняется закону Ома

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{q}{CR}, \tag{13}$$

где $U = \dfrac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе (и равное ему напряжение на резисторе), q - заряд на конденсаторе. Наконец, сила тока через конденсатор равно скорости изменения его заряда

$$I_C = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \tag{14}$$

Подставляя значения сил токов в уравнение (12), получим

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} + \frac{q}{RC} = I_0 \cos \omega t \,. \tag{15}$$

А теперь сравним это уравнение с уравнением (4) – они полностью совпадают (только обозначения другие), поэтому сразу переписываем ответ: зависимость заряда на конденсаторе от времени имеет вид

$$q = q_0 \cos \omega (t - \tau), \tag{16}$$

Где время задержки

$$\tau = RC \,. \tag{17}$$

максимальный заряд на конденсаторе равен

$$q_0 \approx I_0 RC \,, \tag{18}$$

Теперь становится понятным и смысл условия $\omega\tau << 1 \quad \Rightarrow \quad \tau << T$ время разряда конденсатора значительно меньше периода колебаний тока.

Часть 3. Теплоемкость земной атмосферы.

3.1 Так как столб находится в равновесии, то выполняется очевидное условие:

$$P_0 S = mg \,. \tag{19}$$

Из этого равенства следует, что масса воздуха равна

$$m = \frac{P_0 S}{g} \tag{20}$$

Численный результат удивителен, для площади в 1 м^2:

$$m = 1{,}0 \cdot 10^4 \, кг \approx 10 \, тонн \tag{21}$$

3.2 Обратим внимание, что как следует из формулы (20) давление воздуха на дно сосуда не зависит от температуры, т.е. оно постоянно. Мысленно разобьем столб воздуха на тонкие горизонтальные слои. Аналогичный вывод можно сделать и для давления в любом горизонтальном слое: оно остается постоянным при изменении температуры. Толщина слоя изменяется, но давление не изменяется! Следовательно, процесс расширения следует считать изобарным.

3.3 Не сложно показать, что при изобарном процессе молярная теплоемкость описывается уравнением Майера

$$C_P = C_V + R = \frac{7}{2}R. \qquad (22)$$

3.4 Полная теплоемкость воздушного столба равна

$$C = \frac{7}{2}\frac{P_0 S}{Mg}R = \frac{7}{2}\frac{1{,}0\cdot 10^5}{29\cdot 10^{-3}10}8{,}31 \approx 1{,}0\cdot 10^7\ \frac{Дж}{м^2\cdot K}. \qquad (23)$$

3.5 К данной теплоемкости следует добавить теплоемкость слоя воды

$$C_1 = c\rho Sh \approx 0{,}42\cdot 10^7\ \frac{Дж}{м^2\cdot K} \qquad (24)$$

Обратите внимание, что теплоемкость атмосферы более чем в два раза больше теплоемкости слоя воды!
Суммарная теплоемкость 1 м^2 поверхности земли равна

$$C \approx 1{,}4\cdot 10^7\ \frac{Дж}{м^2\cdot K}. \qquad (25)$$

Часть 4. Так почему же январь холоднее декабря?

4.1 Главная причина изменения потока теплоты от Солнца – наклон земной оси к плоскости ее орбиты.

4.2 Очевидно, что период изменения равен одному году, поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365\cdot 24\cdot 3600} = 2{,}0\cdot 10^{-7}\ c^{-1}. \qquad (26)$$

4.3 Запишем уравнение теплового баланса с учетом теплоемкости Земли (в расчете на 1 м^2):

$$C\frac{\Delta T}{\Delta t} = q_0 + b\cos\omega t - \sigma T^4 \qquad (27)$$

Теперь подставим значение $T = \overline{T} + \delta$. Если $\delta << T$, то $\sigma\left(\overline{T} + \delta\right)^4 \approx \sigma\overline{T}^4 + 4\sigma\overline{T}^3\delta$. Тогда уравнение (36) преобразуется к виду

$$C\frac{\Delta\left(\overline{T} + \delta\right)}{\Delta t} = q_0 + b\cos\omega t - \sigma\overline{T}^4 - 4\sigma\overline{T}^3\delta. \qquad (28)$$

В этом уравнении $q_0 = \sigma\overline{T}^4$ (как условие теплового баланса в усредненном приближении).
Наконец, перепишем (37) в виде

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta t} = b\cos\omega t^4 - \frac{4\sigma\overline{T}^3}{C}\delta. \qquad (29)$$

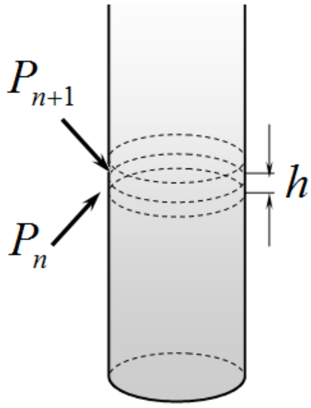
А это уравнение совпадет с рассмотренными уравнениями (4) и (15) Поэтому его решение будет аналогичным!
Следовательно, приближенное значение временной задержки равно

$$\tau = \frac{C}{4\sigma\overline{T}^3} \approx \frac{1{,}4\cdot 10^7}{4\cdot 5{,}7\cdot 10^{-8}(280)^3} \approx 2{,}8\cdot 10^6\, c \approx 32\,суток. \qquad (30)$$

Эта величина в 10 раз меньше периода изменения потока энергии. Поэтому использованное приближение вполне применимо.
Как видно, проведенный анализ, даже в рамках приближенных моделей дал прекрасный результат!

<u>Дополнение для скептиков, не входящее в решение задачи.</u>

Почти очевидное заключение о том, что нагрев атмосферы происходит изобарно, можно подтвердить прямым расчетом.



Теплоемкость земной атмосферы.

Мысленно разобьем воздушный столб на тонкие слои толщиной h При переходе от слоя номер n к следующему слою давление будет уменьшаться на величину гидростатического давления в этом слое, т.е.

$$P_{n+1} = P_n - \rho g h. \tag{22}$$

Плотность воздуха в слое n зависит от давления в этом слое, эта зависимость следует из уравнения состояния идеального газа[1]:

$$PV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{RT}P. \tag{23}$$

Подстановка этого выражения в формулу (22) дает следующий результат

$$P_{n+1} = P_n - \rho_n g h = P_n - \frac{Mgh}{RT}P_n = P_n \xi \tag{24}$$

Где обозначено искомое значение знаменателя прогрессии

$$\xi = \left(1 - \frac{Mgh}{RT}\right) \tag{25}$$

Таким образом, зависимость давления от номера слоя имеет вид

$$P_n = P_0\left(1 - \frac{Mgh}{RT}\right)^n. \tag{26}$$

<u>Для любителей высшей математики</u>: при бесконечно малой толщине слоя эта формула преобразуется к виду (что можно получить, как с помощью предельного перехода в формуле (26), так и рассматривая выражение (24) как дифференциальное уравнение)

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right). \tag{26а}$$

3.2 Массы воздуха можно вычислить, как сумму масс всех слоев. Так как давление и плотность пропорциональны, то изменение плотности описывается формулой, аналогично формуле (26) для давления. Поэтому масса воздушного столба равна

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n S h = \rho_0 S h \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = \frac{\rho_0 S h}{1-\xi} = \frac{\frac{MP_0}{RT}Sh}{1-\left(1-\frac{Mgh}{RT}\right)} = \frac{P_0 S}{g} \tag{27}$$

Такой же результат можно получить, интегрируя формулу (26а).

3.3 Для вычисления высоты центра масс следует воспользоваться определением

$$mH_C = \sum_{n=0}^{\infty}(nh)(\rho_n S h) \tag{28}$$

Здесь $(\rho_n S h) = m_n$ - масса слоя n, hn - высота, на которой находится этот слой. Вычислим эту сумму (с использованием формулы $\sum_{n=0}^{\infty} n\xi^n = \frac{\xi}{(1-\xi)^2}$):

---

[1] Не путайте универсальную газовую постоянную ни с радиусом сосуда, ни с сопротивлением конденсатора!

$$\sum_{n=0}^{\infty}(nh)(\rho_n Sh) = \rho_0 Sh^2 \sum_{n=0}^{\infty} n\xi^n = \rho_0 Sh^2 \frac{\xi}{(1-\xi)^2} = \frac{P_0 M}{RT} Sh^2 \frac{1-\frac{Mgh}{RT}}{\left(\frac{Mgh}{RT}\right)^2} = \frac{P_0 S}{g} \cdot \frac{RT}{Mg}. \quad (28)$$

На последнем шаге мы пренебрегли в числителе малым по сравнению с 1 слагаемым $\frac{Mgh}{RT}$ - действительно все наши рассуждения справедливы при очень малых h.

С учетом выражения (27) для массы столба, получаем, что его центр масс находится на высоте

$$H_C = \frac{RT}{Mg} \quad (29)$$

Отметим, интересную и легко запоминающуюся формулу: высота центра масс изотермического столба газа удовлетворяет соотношению

$$\frac{MgH_C}{RT} = 1.$$

Конечно, такой же результат следует и в результате интегрирования!

3.4 При расчете теплоемкости столба необходимо учесть, что при повышении температуры увеличивается не только кинетическая энергия молекул газа (т.е. его внутренняя энергия), но и потенциальная энергия в поля тяжести земли (обозначим изменение этой энергии ΔU_g .

Следовательно, теплоемкость воздушного столба равна

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta U_g}{\Delta T}. \quad (30)$$

Первое слагаемое в этой формуле есть теплоемкость газа при изохорном процессе

$$\frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{5}{2}\frac{m}{M}R. \quad (31)$$

Второе слагаемое – описывает изменение потенциальной энергии в поле тяжести земли. Оно равно:

$$\frac{\Delta U_g}{\Delta T} = \frac{\Delta(mgH_c)}{\Delta T} = \frac{P_0 S}{Mg}R = \frac{m}{M}R. \quad (32)$$

Итак, полная теплоемкость столба воздуха оказывается равной:

$$C = \frac{7}{2}\frac{m}{M}R = \frac{7}{2}\frac{P_0 S}{Mg}R. \quad (33)$$