

## Задача 10-3 Насос

### Часть 1. Накачивание воздуха.

1.1 В начальном состоянии положении (точка 1) поршень находится в крайнем правом положении, объем газа -  $v_0$ , давление  $P_0$ .

Поршень начинает двигаться влево, сжимая газ в камере. Пока давление газа в камере насоса не достигнет давления газа в сосуде, оба клапана будут закрыты, поэтому процесс сжатия будет описываться уравнением

$$P_0 v_0 = P v \Rightarrow P = \frac{P_0 v_0}{v}. \quad (1)$$

Давление газа в камере достигнет значения давления в сосуде  $P_k$ , когда объем уменьшится до значения  $v'$  (точка 2), которое определяется выражением

$$P_k = \frac{P_0 v_0}{v'} \Rightarrow v' = \frac{P_0 v_0}{P_k}. \quad (2)$$

После этого откроется клапан 1 и газ начнет поступать в сосуд.

На этом участке происходит сжатие газа в объеме сосуда и камеры насоса, поэтому описывается уравнением

$$P_k (V + v') = P (V + v) \Rightarrow P = P_k \frac{V + v'}{V + v}. \quad (3)$$

Такое сжатие будет продолжаться до тех пор, пока поршень не достигнет крайнего левого положения (точка 3), в котором объем газа в камере насоса равен  $v_1$ , давление достигнет значения

$$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + \frac{P_k v'}{V + v_1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + P_0 \frac{v_0}{V + v_1}. \quad (4)$$

Это же давление будет и в сосуде, на остальных участках цикла оно изменяться не будет.

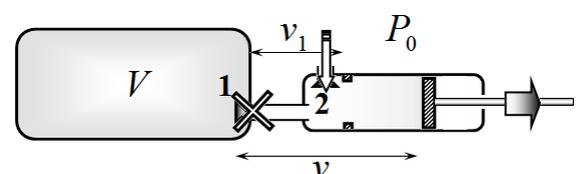
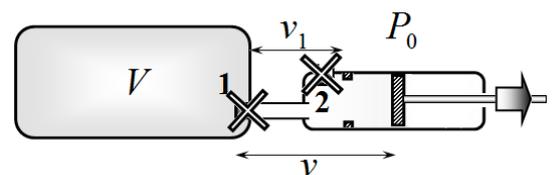
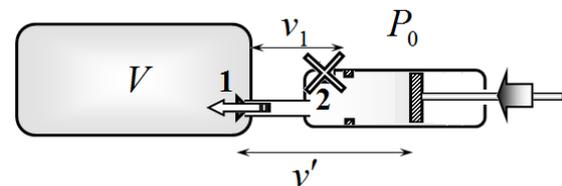
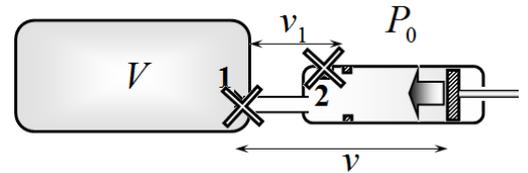
На следующем этапе поршень начинает обратное движение (вправо), при этом оба клапана опять оказываются закрытыми, пока давление в камере насоса не опустится до атмосферного давления. На этом участке уравнение процесса имеет вид

$$P_{k+1} v_1 = P v \Rightarrow P = \frac{P_{k+1} v_1}{v}. \quad (5)$$

Давление в камере насоса станет равным атмосферному, когда объем газа увеличится до значения  $v''$ , которое определяется формулой

$$P_0 = \frac{P_{k+1} v_1}{v''} \Rightarrow v'' = \frac{P_{k+1} v_1}{P_0}. \quad (6)$$

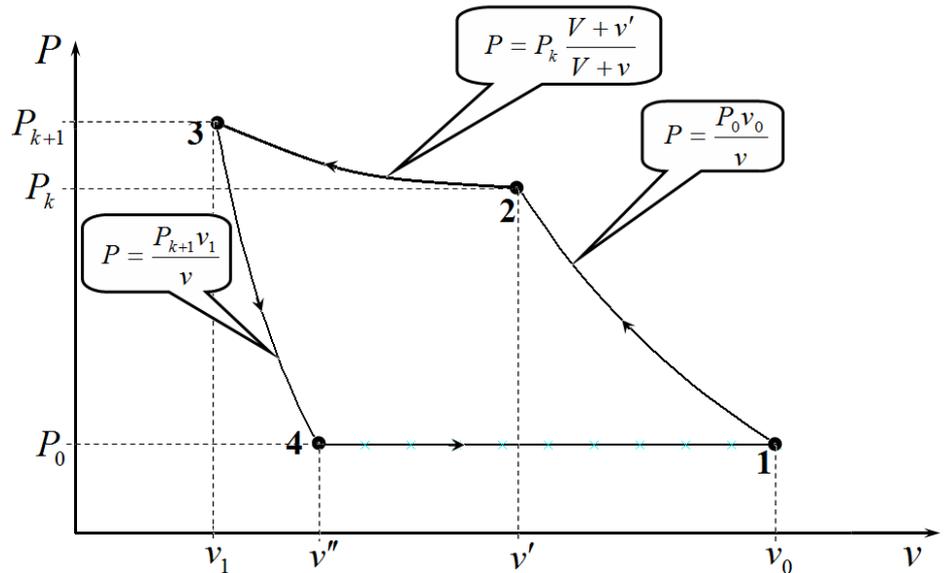
При дальнейшем смещении поршня откроется клапан 2 и атмосферный воздух будет поступать в камеру насоса, при этом давление воздуха в камере насоса будет оставаться равным атмосферному  $P = P_0$ .



Для наглядности все характеристики цикла сведены в таблицу и показаны на графике.

**Цикл накачки.**

Процесс	Начальное состояние		Уравнение процесса	Конечное состояние	
	Объем	Давление		Объем	Давление
1-2	$v_0$	$P_0$	$P = \frac{P_0 v_0}{v}$	$v' = \frac{P_0 v_0}{P_k}$	$P_k$
2-3	$v'$	$P_k$	$P = P_k \frac{V + v'}{V + v}$	$v_1$	$P_{k+1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + \frac{P_0 v_0}{V + v_1}$
3-4	$v_1$	$P_{k+1}$	$P = \frac{P_{k+1} v_1}{v}$	$v'' = \frac{P_{k+1} v_1}{P_0}$	$P_0$
4-1	$v''$	$P_0$	$P = P_0$	$v_0$	$P_0$



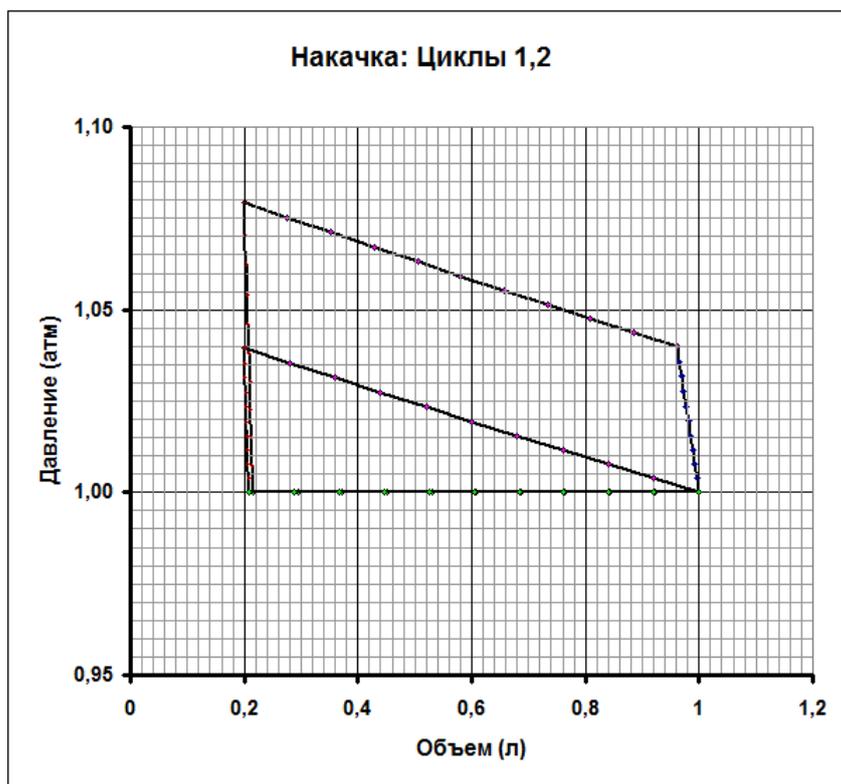
**Диаграмма цикла накачки.**

1.2 – 1.3 Расчеты параметров требуемых циклов, проведенные по формулам таблицы 1 приведены в соответствующих таблицах и на графиках.

### Циклы 1, 2

Таблица состояний.

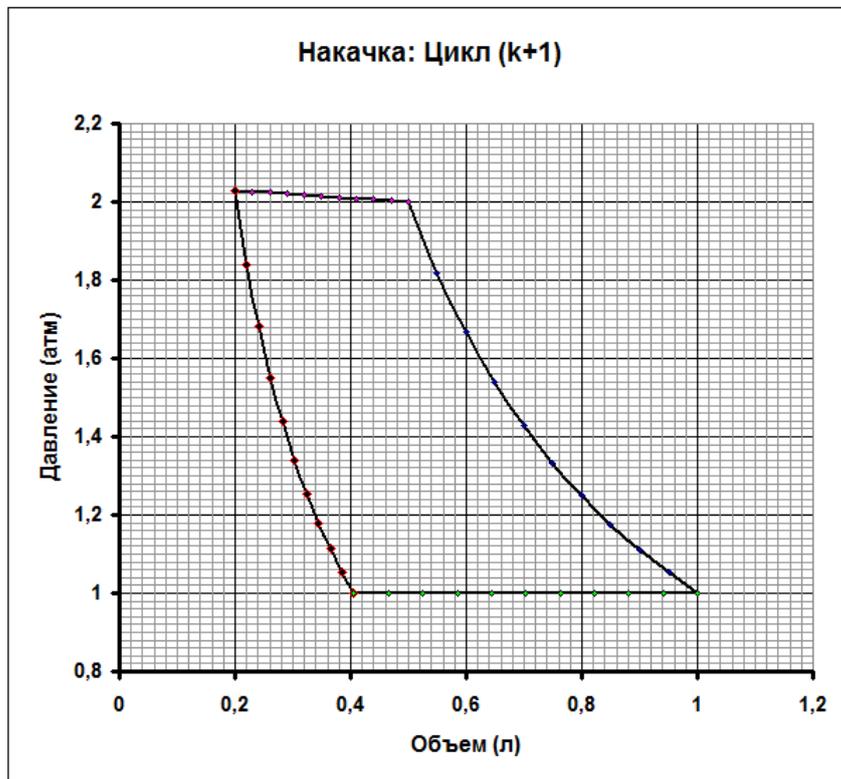
Точка	Объем $v$ (л)	Давление $P$ (атм.)
Цикл 1		
1	1,00	1,00
2	1,00	1,00
3	0,20	1,04
4	0,21	1,00
Цикл 2		
1	1,00	1,00
2	0,96	1,04
3	0,20	1,08
4	0,22	1,00



### Цикл $(k+1)$

Таблица состояний.

Точка	Объем $v$ (л)	Давление $P$ (атм.)
1	1,00	1,00
2	0,50	2,00
3	0,20	2,03
4	0,41	1,00



1.4 Фактически требуемая формула получена в пункте 1.1 – формула (4):

$$P_{k+1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + P_0 \frac{v_0}{V + v_1}. \quad (4')$$

Из сравнения с формулой, приведенной в условии ( $P_k = \gamma P_{k-1} + a$ ), следует, что ее параметры задаются формулами

$$\gamma = \frac{V}{V + v_1} \quad (7)$$

$$a = P_0 \frac{v_0}{V + v_1} \quad (8)$$

1.5 Предельное давление может быть найдено как путем чисто физических рассуждений, так и формально математически.

Физические рассуждения. Максимально возможное сжатие воздуха в камере насоса достигается, когда поршень приходит в крайнее левое положение, а при этом клапан сосуда еще не открывается

В этом случае из выражения (1) следует формула для максимального давления

$$\bar{P} = P_0 \frac{v_0}{v_1}. \quad (9)$$

Формально математически этот же результат можно получить из рекуррентной формулы, полагая в ней, что давление перестало изменяться, т.е.  $P_{k+1} = P_k = \bar{P}$ . В этом случае получаем

$$\bar{P} = \gamma \bar{P} + a \Rightarrow \bar{P} = \frac{a}{1 - \gamma} = P_0 \frac{v_0}{v_1}. \quad (9')$$

1.6 Из обозначения  $\delta_k = \bar{P} - P_k$  выразим значение давления  $P_k = \bar{P} - \delta_k$  и подставим в рекуррентную формулу

$$\bar{P} - \delta_k = \gamma(\bar{P} - \delta_{k-1}) + a. \quad (10)$$

С учетом выражения (9'), получаем, что

$$\delta_k = \gamma \delta_{k-1} \quad (11)$$

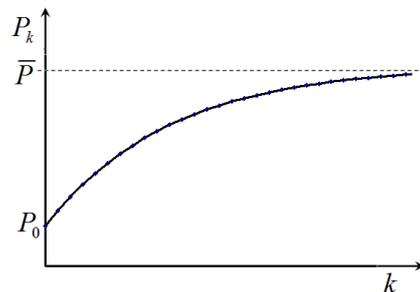
1.7 Формула (11), указывает, что величины  $\delta_k$  образуют геометрическую прогрессию, поэтому

$$\delta_k = \delta_0 \gamma^k \quad (12)$$

С помощью обратной подстановки  $P_k = \bar{P} - \delta_k$  получим

$$P_k = \bar{P} - \delta_0 \gamma^k = P_0 \frac{v_0}{v_1} - \left( P_0 \frac{v_0}{v_1} - P_0 \right) \left( \frac{V}{V + v_1} \right)^k. \quad (13)$$

График этой зависимости имеет вид кривой, монотонно стремящейся к предельному значению.



1.8 для расчета числа циклов удобно воспользоваться формулой (12). Проведем численный расчет ее параметров:

- знаменатель прогрессии  $\gamma = \frac{V}{V + v_1} = \frac{20,00}{20,20} = 0,990$ ;

- максимальное давление  $\bar{P} = P_0 \frac{v_0}{v_1} = 5,00 P_0$ ;

- начальное отклонение  $\delta_0 = \bar{P} - P_0 = 4,00 P_0$ ;

- конечное отклонение  $\delta_k = \bar{P} - 0,95\bar{P} = 0,25P_0$ .

Теперь из формулы (12) найдем

$$\delta_k = \delta_0 \gamma^k \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{\delta_k}{\delta_0}}{\ln \gamma} = 276 \approx 280. \quad (14)$$

## Часть 2. Откачка.

2.1 Решение этой части полностью аналогично решению первой части задачи, поэтому приведем его кратко.

Цикл откачки также состоит из четырех этапов. В соответствии с условием начнем с состояния, когда поршень находится в крайнем левом положении (давление в этом состоянии равно атмосферному) и начинает двигаться вправо. При этом оба клапана закрыты: газ в камере насоса расширяется, давление падает. Когда давление в камере становится равным давлению в сосуде, открывается клапан 1 и газ частично начинает выходить из сосуда. Поршень смещается в крайнее правое положение и начинает возвращаться обратно, при этом клапан 1 закрывается. Давление в камере растет и когда достигает атмосферного открывается клапан 2 и газ частично выбрасывается в атмосферу. Эти стадии показаны на рисунке, начальные, конечные значения параметров газа в камере насоса и уравнения процессов приведены в Таблице 2. Схематическая диаграмма цикла показана на рисунке.

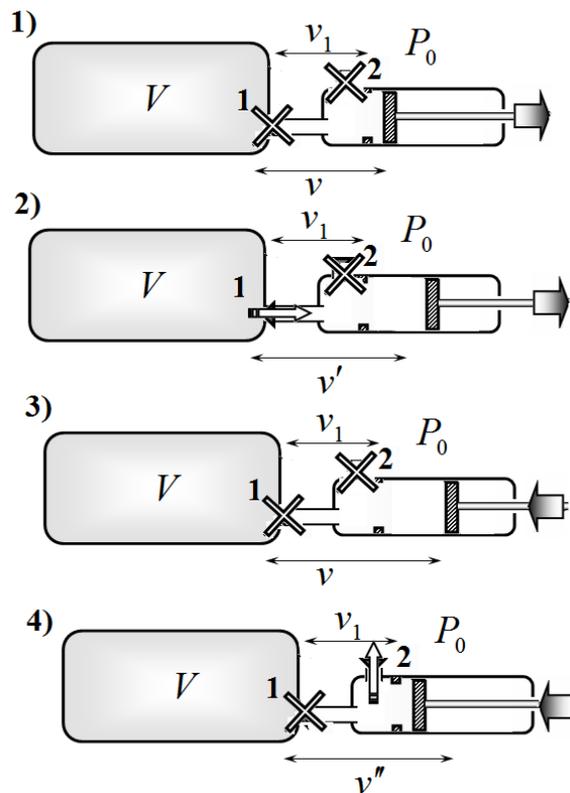


Таблица 2. Цикл откачки.

Процесс	Начальное состояние		Уравнение процесса	Конечное состояние	
	Объем	Давление		Объем	Давление
1-2	$v_1$	$P_0$	$P = \frac{P_0 v_1}{v}$	$v' = \frac{P_0 v_1}{P_k}$	$P_k$
2-3	$v'$	$P_k$	$P = P_k \frac{V + v'}{V + v}$	$v_0$	$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_0}$
3-4	$v_0$	$P_{k+1}$	$P = \frac{P_{k+1} v_0}{v}$	$v'' = \frac{P_{k+1} v_0}{P_0}$	$P_0$
4-1	$v''$	$P_0$	$P = P_0$	$v_1$	$P_0$

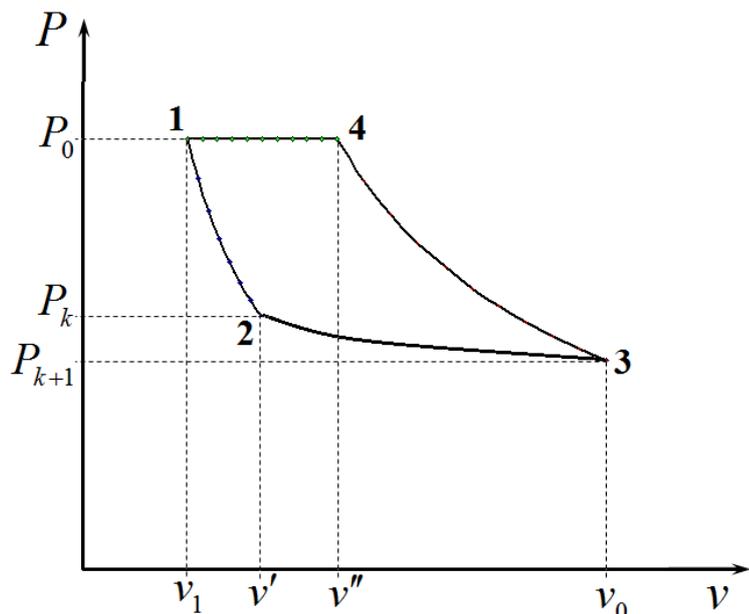


Диаграмма цикла откачки.

2.2 Уменьшение давления в сосуде происходит на 3 этапе цикла откачки, уравнение процесса на этом этапе позволяет получить рекуррентное соотношение, связывающее давления до и после очередного цикла

$$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_0}. \quad (15)$$

Подставляя значения для объема  $v'$  (при котором начинается выход газа из сосуда), получим

$$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_0} = P_k \frac{V + \frac{P_0 v_1}{P_k}}{V + v_0} = P_k \frac{V}{V + v_0} + P_0 \frac{v_1}{V + v_0}. \quad (16)$$

Это соотношение полностью аналогично соотношению (4'), проанализированному в первой части задачи. Поэтому можно переписать полученные ранее решения, только при этом надо поменять местами значения объемов  $v_0$  и  $v_1$ . Тогда зависимость давления в камере от числа проведенных циклов опишется формулой, аналогичной формуле (13):

$$P_k = P_0 \frac{v_1}{v_0} - P_0 \left( \frac{v_1}{v_0} - 1 \right) \left( \frac{V}{V + v_0} \right)^k \quad (17)$$

2.3 Подстановка численных значений параметров в эту формулу и последующий расчет дает значение давления в камере после 50 циклов откачки:

$$P_{50} = P_0 \left( \frac{v_1}{v_0} - \left( \frac{v_1}{v_0} - 1 \right) \left( \frac{V}{V + v_0} \right)^k \right) = P_0 \left( 0,20 + 0,80 \cdot \left( \frac{20}{21} \right)^{50} \right) = 0,27 \text{ атм}. \quad (18)$$

2.4 Предельное минимальное значение давления воздуха в сосуде равно.

$$P_k = P_0 \frac{v_1}{v_0} = 0,20 \text{ атм}. \quad (19)$$