

Задача 10-2. «Газ под поршнем»

Часть 1. Воздух сухой.

1.1 Из условия равновесия поршня следует, что давление газа равно

$$P = P_0 + \frac{k(l-l_0)}{S}. \quad (1)$$

С учетом связи между параметрами $P_0 S = k l_0$, приведенной в условии задачи, данная зависимость упрощается:

$$P = P_0 + \frac{k(l-l_0)}{S} = \frac{kl}{S} = \frac{k l_0}{S} \frac{l}{l_0} = P_0 \frac{l}{l_0}. \quad (2)$$

1.2 Для нахождения связи между температурой и объемом (который определяется положением поршня), используем уравнение состояния идеального газа в форме Клапейрона для воздуха внутри сосуда

$$\frac{Pl}{T} = \frac{P_0 l_0}{T_0} \quad (3)$$

Из этих двух выражений следует, что зависимость температуры от объема имеет вид

$$T = T_0 \frac{P}{P_0} \frac{l}{l_0} = T_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^2. \quad (4)$$

Откуда следует, что зависимость положения поршня от температуры воздуха описывается функцией

$$l = l_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (5)$$

1.3 Расчет температуры следует проводить по формуле (4):

$$T = T_0 (1 + \eta)^2 = 422 \text{ K} = 149^\circ \text{C}. \quad (6)$$

Часть 2. Влажный воздух.

2.1 Условие равновесия поршня в данном случае имеет вид

$$P + P_{\text{нас}} = P_0 + \frac{k(l-l_0)}{S} = P_0 \frac{l}{l_0}. \quad (7)$$

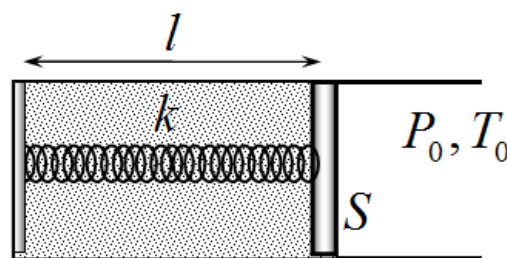
Где P - давление сухого воздуха, $P_{\text{нас}}$ - давление насыщенных паров воды в сосуде. Выразим из этого условия

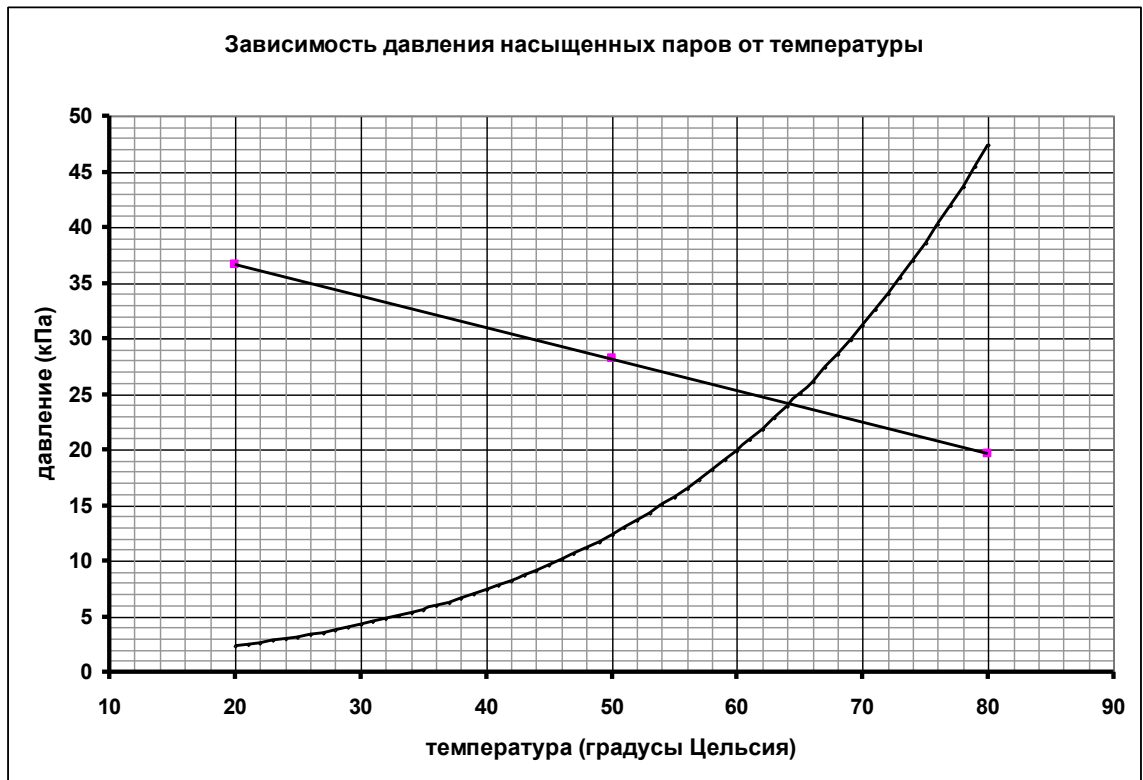
$$P_{\text{нас}} = P_0 \frac{l}{l_0} - P = P_0 \frac{l}{l_0} - P_0 \frac{l_0}{l} \frac{T}{T_0} = P_0 \left(\frac{l}{l_0} - \frac{l_0}{l} \frac{T}{T_0} \right) \quad (8)$$

Здесь использовано уравнение состояния (3), из которого выражено давление сухого воздуха. Уравнение (8) может быть решено графически. Для этого на графике зависимости давления насыщенных паров от температуры следует построить линейный график функции

$F(T) = P_0 \left(\frac{l}{l_0} - \frac{l_0}{l} \frac{T}{T_0} \right)$, все параметры которой известны. Для его построения достаточно

рассчитать координаты двух точек. Ниже показано необходимое построение. Точка пересечения этих графиков дает решения уравнения (8), т.е. необходимую температуру. В случае влажного воздуха она равна $t_1 = 64^\circ \text{C}$, что значительно ниже, чем для сухого воздуха.





2.2 Рассчитаем количество теплоты Q_1 , которое получил сухой воздух. По первому закону термодинамики количество полученной теплоты равно сумме изменения внутренней энергии и совершенной работы

$$Q = \Delta U + A. \quad (9)$$

Изменение внутренней энергии воздуха рассчитывается по формуле

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T. \quad (10)$$

Используя уравнение процесса (4), находим, что

$$\Delta T = T_0 \left(\left(\frac{l}{l_0} \right)^2 - 1 \right) = T_0 \left((1 + \eta)^2 - 1 \right) = \eta(2 + \eta) T_0. \quad (11)$$

Тогда

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \eta(2 + \eta) \nu R T_0 = \frac{5}{2} \eta(2 + \eta) P_0 S l_0. \quad (12)$$

При выводе использовано уравнение состояния газа $P_0 S l_0 = \nu R T_0$.

В процессе расширения давление изменяется пропорционально объему. Работа может быть рассчитана по формуле

$$A = \frac{P_0 + P_1}{2} S \Delta l = \frac{P_0 + P_0(1 + \eta)}{2} \eta S l_0 = \frac{1}{2} \eta(2 + \eta) P_0 S l_0. \quad (13)$$

Таким образом, количество полученной теплоты равно

$$Q_1 = 3\eta(2 + \eta) P_0 S l_0. \quad (13)$$

Во втором случае значительное количество теплоты пойдет на испарение воды. Рассчитаем это количество:

$$Q_{исп.} = L \Delta m, \quad (14)$$

где Δm - масса испарившейся воды. Ее находим, используя уравнение состояния для водяного пара (пренебрегая давлением насыщенных паров при начальной температуре),

$$P_{нас.} S(1+\eta)l_0 = \frac{\Delta m}{M} RT \Rightarrow \Delta m = \frac{P_{нас.} M(1+\eta)}{RT} Sl_0. \quad (15)$$

В этом выражении $T = (64 + 273) = 337 K$, конечная температура, $P_{нас.} = 24 \text{ кПа}$ - давление насыщено водяного пара при этой температуре, $M = 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ - молярная масса воды.

Вычислим отношение

$$\frac{Q_{исп}}{Q_1} = \frac{L \frac{P_{нас.} M(1+\eta)}{RT} Sl_0}{3\eta(2+\eta)P_0 Sl_0} = \frac{LM}{RT P_0} \frac{P_{нас.} (1+\eta)}{3\eta(2+\eta)} \approx 3,2. \quad (16)$$

При нагревании влажного воздуха изменение его температуры меньше, чем при нагревании сухого. Поэтому количество, теплоты, которое пойдет на нагревание сухого воздуха и совершение работы будет меньше, чем Q_1 . Поэтому в пределах допустимой погрешности можно считать, что $Q_2 \approx Q_{исп}$. То есть во втором случае, при нагревании влажного воздуха потребуется примерно в 3 раза большее количество теплоты.