

Задача 2. Картезианский водолаз.

Картезианский водолаз – механическая игрушка, основанная на изменении силы Архимеда при увеличении внешнего давления. Первое описание водолаза было дано итальянским учёным Рафаэлло Маджотти в 1648 году. Его водолазы, а он называл их «флакончики», плавали в высоких цилиндрических сосудах, избыточное давление в которых создавалось закрывающей их ладонью или, если сосуд достаточно узок, большим пальцем.

В скором времени игрушка стала популярной. С начала XVIII века эта игрушка стала называться Декартов или Картезианский (по-латыни Декарт произносится как Картезий) водолаз. а также «Картезианский дьявол», «Поплавок Декарта».

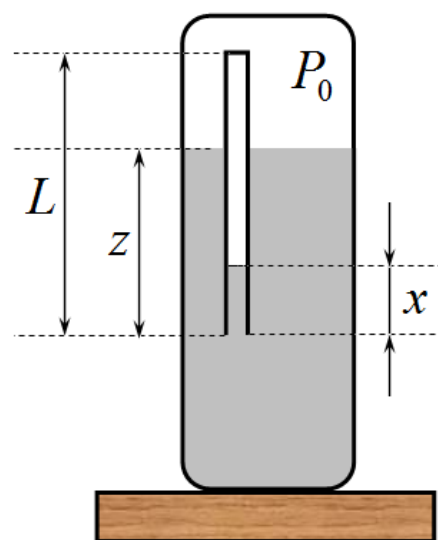
Несмотря на почти четырехвековую историю, строгое описание поведения этого поплавка вызывает затруднение у современных «олимпиадников».

Рассмотрим тонкостенную трубку, закрытую с одного конца и открытую с другого (можно назвать ее пробирка), которая помещается в сосуд с водой открытым концом вниз. Будем считать, что центр тяжести трубки смещен к открытому краю, поэтому трубка в сосуде всегда располагается вертикально. Температура в системе остается постоянной.

Будем считать, что все параметры установки заданы: длина трубки $L = 10\text{ см}$, площадь ее поперечного сечения s , плотность воды $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, давление воздуха в сосуде P_0 (оно может изменяться).

Обозначим: z - глубина погружения трубки по ее нижнему краю; x - высота столбика воды в трубке.

Давление воздуха будем измерять в единицах водяного столба, в этом случае гидростатическое давление воды просто равно разности высот (давление и длина измеряются в одних единицах)



Часть 1. Вынужденное погружение.

В данной части задачи будем считать, что давление воздуха в сосуде постоянно и равно P_0 . Пустую пробирку аккуратно опускают открытым концом в воду. При этом она свободно плавает на поверхности воды, погрузившись на глубину $z_0 = \eta L$ (где η - известный безразмерный коэффициент). Затем пробирку удерживают рукой на некоторой глубине z , которая может быть как меньше, так и больше глубины пробирки.

1.1 Найдите зависимость высоты столбика воды в трубке x от глубины погружения z . Постройте схематический график полученной зависимости.

1.2 Найдите зависимость силы Архимеда, действующей на трубку, от глубины погружения z . Постройте схематический график полученной зависимости.

1.3 Найдите максимальное значение силы Архимеда, укажите, при каком значении z оно реализуется.

1.4 Выразите силу Архимеда, действующую на трубку, через давление воздуха в трубке P и глубину ее погружения z .

1.5 Получите строгое уравнение, позволяющее получить значение глубины z_1 , на которую надо погрузить трубку, чтобы она утонула и больше самопроизвольно не всплывала. Рассчитайте численное значение этой глубины при нормальном атмосферном давлении $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и $\eta = 0,80$.

Часть 2. Трубка в закрытом сосуде.

Пробирку погрузили в воду, как описано в части 1. Она плавает, погрузившись в воду на глубину $z_0 = 0,80L$ при давлении воздуха в сосуде P_0 . Сосуд закрывают и начинают плавно изменять давление воздуха в нем.

2.1 При каком давлении воздуха P , пробирка начнет тонуть? Получите строгое уравнение, позволяющее найти эту величину. Рассчитайте численное значение этой величины при $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и $\eta = 0,80$.

Часть 3. Конструкторская.

3.1 Предложите простой вариант рассмотренной игрушки, в котором водолаза можно заставить погружаться легким нажатием пальца. (конечно, самого водолаза трогать нельзя). Укажите примерные численные характеристики вашей игрушки.