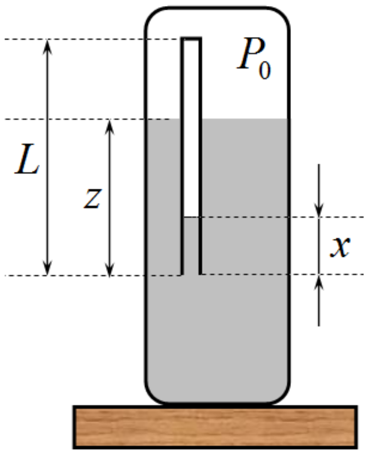
Задача 2. Картезианский водолаз.

Часть 1. Вынужденное погружение.



1.1 Так как температура воздуха в трубке и его масса не изменяются, то для этого воздуха справедлив закон Бойля-Мариотта:

$$P_0 L = P(L - x) \qquad (1)$$

С другой стороны, давление воздуха в трубке можно выразить через гидростатическое давление воды:

$$P = P_0 + z - x \qquad (2)$$

Здесь, как сказано в условии давления воздуха измеряется в метрах водяного столба.

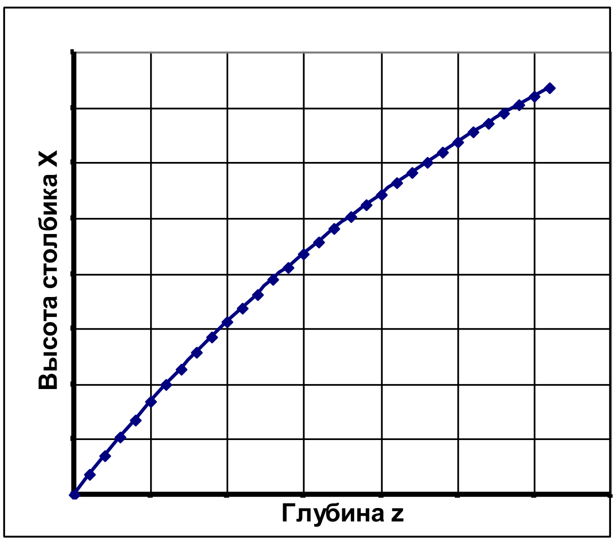
В этих уравнениях две неизвестные величины: давление воздуха в трубке P и высота x, поэтому эта система может быть решена:

$$\begin{aligned} &P_0 L = (P_0 + z - x)(L - x) \quad \Rightarrow \\ &x^2 - (P_0 + z)x - Lx + (P_0 + z)L - P_0 L = 0 \quad \Rightarrow \\ &x^2 - (P_0 + z + L)x + zL = 0 \quad \Rightarrow \\ &x_{1,2} = \frac{(P_0 + z + L)}{2} \pm \sqrt{\frac{(P_0 + z + L)^2}{4} - zL} \end{aligned} \qquad (3)$$

Из двух корней следует выбрать корень со знаком минус. В качестве обоснования такого выбора можно привести следующий: при $z = 0$ высота x также должна равняться нулю.
Поэтому окончательно получим

$$x(z) = \frac{(P_0 + z + L)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + z + L)^2}{4} - zL}. \qquad (4)$$

Схематический график этой зависимости показан на рисунке: при увеличении z, величина x монотонно стремится к L.



1.2 Силу Архимеда можно выразить по известной формуле, как вес вытесненной воды. Однако, необходимо рассмотреть два случая:

А) Глубина погружения меньше длины пробирки $z < L$. В этом случае

$$F_A = \rho g s(z - x) \tag{5}$$

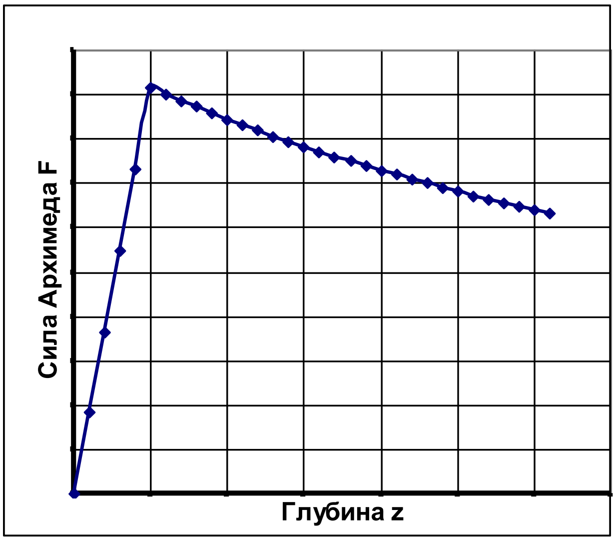
Так как x растет медленнее, чем z, то в этом случае сила Архимеда возрастает при увеличении z.

Б) Глубина погружения больше длины пробирки $z > L$. В этом случае

$$F_A = \rho g s(L - x). \tag{6}$$

В этом случае сила Архимеда с ростом z убывает.

Схематический график этой зависимости показан на следующем рисунке.



1.3 Таким образом, сила Архимеда принимает максимальное значение при $z = L$.

Как следует из формулы (4), при этом величина x будет равна

$$x(z) = \frac{(P_0 + 2L)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + 2L)^2}{4} - L^2} = \frac{(P_0 + 2L)}{2} - \sqrt{\frac{P_0^{\,2} + 4P_0 L}{4}},$$

а максимальное значение силы Архимеда:

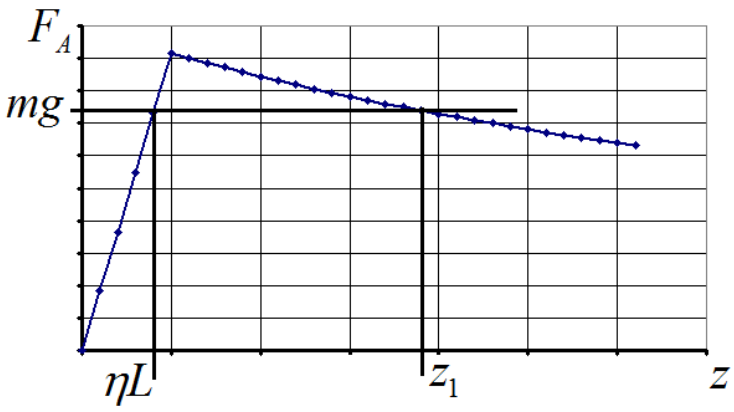
$$F_{A\max} = \rho g s(L - x) = \rho g s\left(L - \frac{(P_0 + 2L)}{2} + \sqrt{\frac{P_0^{\,2} + 4P_0 L}{4}}\right) = \rho g s\left(\sqrt{\frac{P_0^{\,2} + 4P_0 L}{4}} - \frac{P_0}{2}\right) \tag{7}$$

Заметим, что при $P_0 >> L$ это максимальное значение стремится к L. Действительно в этом приближении изменение давление воздуха в трубке при погружении пренебрежимо мало, поэтому можно считать, что воздух занимает всю трубку.

1.4 Силу Архимеда можно выразить как разность сил давлений на закрытый верхний торец трубки, поэтому

$$F_A = (P - (P_0 + \rho g(z - L))s, \tag{8}$$

что, конечно, равносильно использованному ранее подходу.



1.5 На графике зависимости силы Архимеда от глубины погружения отметим уровень силы тяжести. Для этого проведем вертикальную линию $z = \eta L$ до пересечения с графиком зависимости силы Архимеда от глубины. В точке пересечения эта сила будет равна силе тяжести. Дале проведем горизонтальную линию на уровне силы тяжести до пересечения со второй ветвью графика. Абсцисса этой точки и будет искомая глубина z_1. Легко показать, что положение равновесия в точке z_1 является неустойчивым, поэтому, если глубина погружения станет чуть больше, чем z_1, трубка утонет. Таким образом, для расчета этой глубины необходимо решить следующее уравнение

$$F_A(\eta L) = F_A(z_1). \tag{9}$$

Используя полученные формулы для силы Архимеда, получим требуемое уравнение:

$$(z - x)_0 = (L - x(z_1)) \quad \Rightarrow$$
$$h_0 = L - \frac{(P_0 + z + L)}{2} + \sqrt{\frac{(P_0 + z + L)^2}{4} - zL} \tag{10}$$

где обозначено

$$h_0 = (z - x)_0 = \eta L - \frac{(P_0 + \eta L + L)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + \eta L + L)^2}{4} - \eta L^2} \tag{11}$$

Высота столбика воздуха в трубке, когда она плавает на поверхности.

Данной уравнение очень громоздко. Одна при данных заданных в условии величина $L << P_0$. Так $P_0 = 10 м$, а $L = 0{,}10 м$. Поэтому можно пренебречь изменение давления на высоте трубки. В этом случае $h_0 \approx L$ - при погружении трубки на ее высоту объем воздуха в ней остается неизменным. В положении равновесия сила Архимеда, а следовательно, и сила тяжести трубки равны $mg = \rho g s \eta L$. При погружении на глубину z давление в трубке становится равным $(P_0 + z)$, поэтому высота столба воздуха в трубке оказывается равной

$$P_0 L = (P_0 + z)h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P_0 L}{(P_0 + z)} \tag{12}$$

При этом сила Архимеда должна стать равной силе тяжести

$$\rho g s h = \rho g s \eta L \quad \Rightarrow \quad \frac{P_0 L}{(P_0 + z)} = \eta L\,. \tag{13}$$

Из этого уравнения элементарно находим

$$z = \frac{1 - \eta}{\eta} P_0 = 2{,}5 м\,. \tag{14}$$

<u>Часть 2</u> данной задачи решается аналогично, только в записанных уравнениях следует рассматривать зависимость параметров не от z, а от давления воздуха в сосуде P_1.

Часть 3 Конструкторская, предоставляет богатые возможности для творчества. Однако основными идеями являются: помещение трубки в закрытый сосуд, и предварительное наполнении трубки водой, так чтобы она плавала «на грани» - при незначительном изменении объема сосуда (а, следовательно, и объема воздуха в трубке) трубка начинала тонуть.