

Задание 11-1. Степенные зависимости.

Задание состоит из двух задач, связанных одной математической идеей: если некоторая величина Y зависит от величины x по степенному закону

$$Y(x) = Y_0 + ax^\gamma,$$

то скорость изменения этой величины описывается формулой, справедливой при любом показателе степени γ и малых значениях Δx

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = a\gamma x^{\gamma-1}.$$

Задача 1.1. Атмосфера с переменной температурой.

У поверхности земли атмосферное давление равно $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$, а температура $T_0 = 290 \text{ К}$. Температура воздуха убывает с высотой z по линейному закону

$$T = T_0(1 - \alpha z).$$

Температура убывает на $\Delta T = 1,0^\circ$ при подъеме на каждые $\Delta h = 100 \text{ м}$. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Молярная масса воздуха $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$.

Универсальная газовая постоянная $R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Атмосфера неподвижна.

1.1.1 Найдите зависимость давления воздуха от высоты $P(z)$.

1.1.2 Рассчитайте численное значение давления воздуха на высоте $H = 1,0 \text{ км}$.

Задача 1.2. Радиоактивные шары.

Два однородных шара изготовлены из одного радиоактивного материала. Благодаря радиоактивному распаду внутри материала постоянно выделяется теплота (мощность выделения этой теплоты постоянна). Шары находятся в вакууме, поэтому потери теплоты в окружающую среду осуществляются только посредством излучения. Радиус первого шара равен R_1 , температура его поверхности равна $T_{S1} = 400 \text{ К}$, а температура в его центре - $T_{C1} = 500 \text{ К}$. Радиус второго шара равен $R_2 = 2R_1$.

1.2.3 Рассчитайте температуры на поверхности T_{S2} и в центре T_{C2} второго шара.

Подсказки:

1. Согласно закону Стефана – Больцмана мощность теплового излучения с единицы площади пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$p = \sigma T^4.$$

2. Закон теплопроводности Фурье утверждает, что плотность потока теплоты (количество теплоты, перетекающей в единицу времени через площадку единичной площади) пропорционален градиенту температуры (изменению температуры на единицу длины):

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

