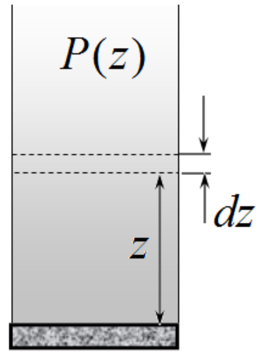
11 класс.

Задание 11-1. Степенные зависимости.

Задача 1.1. Атмосфера с переменной температурой.



1.1.1 Основная проблема, возникающая при решении задачи, заключается в том, что плотность воздуха зависит от давления и температуры, поэтому изменяется при подъеме над поверхностью земли. Поэтому рассмотрим тонкий слой атмосферы толщиной Δz, находящийся на высоте z от поверхности земли. Пренебрежем изменением плотности воздуха в пределах этого тонкого слоя. Тогда изменение давления в пределах этого слоя равно

$$\Delta P = -\rho g \Delta z \,. \tag{1}$$

Плотность воздуха выразим из уравнения состояния Менделеева – Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT} \,. \tag{2}$$

Подставим это выражение в формулу (1):

$$\Delta P = -\frac{MP}{RT_0(1-\alpha z)} g \Delta z \,. \tag{3}$$

Теперь сделаем решительное предположение: зависимость давления от высоты имеет вид

$$P(z) = P_0(1-\alpha z)^\gamma \,. \tag{4}$$

Тогда

$$\Delta P = \gamma P_0 (1-\alpha z)^{\gamma-1} \Delta(1-\alpha z) = -\alpha\gamma P_0 (1-\alpha z)^{\gamma-1} \Delta z \,. \tag{5}$$

Подставим это выражение, а также формулы для зависимостей температуры и давления от высоты в формулу (3):

$$-\alpha\gamma P_0 (1-\alpha z)^{\gamma-1} \Delta z = -\frac{MP_0(1-\alpha z)^\gamma}{RT_0(1-\alpha z)} g \Delta z \,. \tag{6}$$

Это равенство будет верным при

$$\gamma = \frac{Mg}{\alpha R T_0} \,. \tag{7}$$

Таким образом, действительно зависимость давления от высоты имеет вид (4) с показателем степени (7).

1.1.2 Из приведенной в условии зависимости температуру от высоты следует, что

$$\alpha T_0 \Delta h = \Delta T \quad \Rightarrow \quad \alpha T_0 = \frac{\Delta T}{\Delta h} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\frac{К}{м}\,. \tag{8}$$

Показатель степени:

$$\gamma = \frac{Mg}{\alpha R T_0} = \frac{29 \cdot 10^{-3}\,\dfrac{кг}{моль} \cdot 9{,}8\,\dfrac{м}{с^2}}{1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\dfrac{К}{м} \cdot 8{,}3\,\dfrac{Дж}{моль \cdot К}} = 3{,}42 \tag{9}$$

Легко подсчитать температуру на высоте H:

$$T_0(1 - \alpha H) = T_0 - H\,\frac{\Delta T}{\Delta h} = 280K \quad \Rightarrow \quad (1 - \alpha H) = \frac{280}{290}\,.$$

Наконец, давление на высоте H:

$$P(H) = P_0 (1 - \alpha H)^{\gamma} = 1{,}0 \cdot 10^5\,Па \cdot \left(\frac{28}{29}\right)^{4{,}32} = 0{,}89 \cdot 10^5\,Па\,. \tag{10}$$

Задача 1.2. Радиоактивные шары.

1.2.1 Количество теплоты, которое выделяется во всем шаре, пропорционально объему шара. В стационарном режиме энергия, выделившаяся в шаре, равна энергии излученной поверхностью шара:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 w = 4\pi R^2 \sigma T_S^4 \qquad (1)$$

Здесь w - мощность теплоты, выделяющейся в единице объема. Из этого соотношения следует, что

$$\frac{T_{S2}^4}{T_{S1}^4} = \frac{R_2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad T_{S2} = T_{S1}\sqrt[4]{\frac{R_2}{R_1}} = 400K\sqrt[4]{2} \approx 476K\,. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь распределение температур внутри шара, т.е. зависимость температуры от расстояния до центра шара $T(r)$. Для этого рассмотрим сферическую поверхность некоторого радиуса $r < R$ концентрическую с шаром. Поток теплоты через эту поверхность равен количеству теплоты, выделившейся внутри этой поверхности:

$$-4\pi r^2 \kappa \frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{4}{3}\pi r^3 w \qquad (3)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = -C_0 r\,, \qquad (4)$$

где C_0 - некоторая постоянная величина. Используя математическую подсказку, зависимость температуры от расстояния до центра имеет вид:

$$T(r) = T_C - Cr^2\,. \qquad (5)$$

Величина T_C имеет смысл температуры в центре шара. Если положить $r = R$, то эта формула даст значение температуры на поверхности шара. Поэтому можно записать

$$T_C - T_S = CR^2\,. \qquad (6)$$

Постоянная C неизвестна, но ее можно исключить, составив пропорцию:

$$\frac{T_{C2} - T_{S2}}{T_{C1} - T_{S1}} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad (T_{C2} - T_{S2}) = 4(T_{C1} - T_{S1}) = 400K\,. \qquad (7)$$

Окончательно находим, что температура в центре второго шара равна

$$T_{C2} = T_{S2} + 400K = 876K\,. \qquad (8)$$