Задание 2. Знаете ли Вы МКТ?

Часть 1. Всего один шарик.

При расчете сил давления следует использовать следующую основную идею: средняя сила равна отношению импульса, полученного телом, к промежутку времени, в течение которого этот импульс был получен:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \qquad (1)$$

1.1 При выполнении условия $v_0^2 < 2gh$ шарик не будет ударятся о крышку сосуда. В момент каждого удара о дно сосуда он будет передавать дну импульс

$$\Delta p = 2mv_0 \qquad (2)$$

При равноускоренном движении в поле тяжести земли зависимость вертикальной координаты шарика имеет вид

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (3)$$

Поэтому время между двумя последовательными ударами можно легко найти из выражения (2), полагая $z = 0$. Тогда время между ударами оказывается равным

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}. \tag{4}$$

А средняя сила давления шарика на дно сосуда равна (как ни странно!?):

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mg. \tag{5}$$

1.2 Если скорость шарика у дна $v_0 > \sqrt{2gh}$, то он будет ударяться и о верхнюю крышку сосуда. Скорость шарика при ударе о крышку рассчитывается по формуле

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \tag{6}$$

Так как движение шарика между ударами является равноускоренным, то время подъема шарика и равное ему время падения оказывается равным

$$\tau = \frac{h}{\frac{1}{2}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right)} = \frac{2h}{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}. \tag{7}$$

Тогда средняя сила давления шарика на дно равна

$$F_1 = \frac{2mv_0}{2\tau} = \frac{mv_0}{2h}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right). \tag{8}$$

Сила давления на крышку рассчитывается аналогично:

$$F_2 = \frac{2mv_1}{2\tau} = \frac{m\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{2h}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right). \tag{9}$$

Разность этих сил опять равна

$$F_2 - F_1 = mg. \tag{10}$$

Часть 2. Очень много молекул.

2.1 Средняя квадратичная скорость молекул рассчитывается по известной формуле

$$\langle v_{кв.} \rangle = \sqrt{3\frac{RT}{M}} \tag{11}$$

Так как все направления в пространстве равноправны, то

$$\langle v_{кв.x} \rangle = \langle v_{кв.y} \rangle = \langle v_{кв.z} \rangle.$$

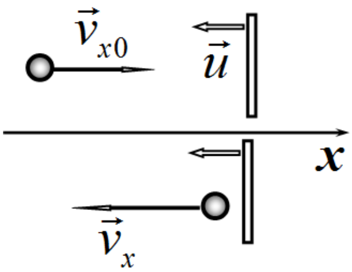
Кроме того,

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2.$$

Поэтому

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle v_{кв.x} \rangle = \sqrt{\frac{RT}{M}}. \tag{12}$$

2.2 При ударе молекулы о поршень изменяется только та проекция вектора скорости, которая перпендикулярна плоскости поршня. Поэтому направим ось x перпендикулярно поршню, вдоль оси сосуда. Рассмотрим молекулу, которая налетает на поршень, имея компоненту скорости, перпендикулярную пластине v_{x0}. Если скорость поршня равна u и направлена



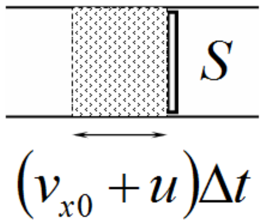
навстречу налетающей молекуле, то после абсолютно упругого удара проекция скорости молекулы станет равной

$$v_x = -v_{x0} - 2u \tag{13}$$

Это соотношение легко доказать, рассматривая упругий удар в системе отсчета, связанной с поршнем, а затем вернувшись в систему отсчета, связанную с сосудом.
Изменение проекции импульса молекулы при ударе равно (m - масса одной молекулы)

$$\Delta p_x = -m(v_{x0} + 2u) - mv_{x0} = -2m(v_{x0} + u). \tag{14}$$

Такой же по модулю, но противоположно направленный импульс получит поршень. Предположим, что у всех молекул модуль проекции скорости на ось равна v_{x0}. Тогда за малый промежуток времени Δt до поршня долетят те молекулы, которые находятся на расстоянии меньшем, чем $(v_{x0} + u)\Delta t$.



Число этих молекул равно

$$\Delta N = \frac{1}{2} nS(v_{x0} + u)\Delta t. \tag{15}$$

Здесь n - концентрация молекул, также учтено, что в направлении стенки летят половина молекул. Эти молекулы предадут стенке импульс, равный

$$\Delta p_\Sigma = \frac{1}{2} nS(v_{x0} + u)\Delta t \cdot 2m(v_{x0} + u) = mn(v_{x0} + u)^2 S\Delta t. \tag{16}$$

Теперь можно провести усреднение по скоростям молекул:

$$\Delta p_\Sigma = \left\langle mn(v_{x0} + u)^2 \right\rangle = mn\left(\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle + 2\left\langle v_{x0} \right\rangle u + u^2\right) S\Delta t. \tag{17}$$

В соответствии с общим подходом, средняя сила, действующая на поршень с одной стороны, равна

$$F_1 = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = mn\left(\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle + 2\left\langle v_{x0} \right\rangle u + u^2\right) S. \tag{18}$$

Понятно, что для вычисления силы, действующей на вторую сторону поршня достаточно в формуле (18) заменить знак скорости u:

$$F_2 = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = mn\left(\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle - 2\left\langle v_{x0} \right\rangle u + u^2\right) S. \tag{19}$$

Разность этих сил и есть сила, действующая на поршень со стороны газа:

$$F = F_1 - F_2 = 4mn\left\langle v_{x0} \right\rangle uS. \tag{20}$$

Осталось выразить величины, входящие в эту формулу, через величины, заданные в условии задачи:

$$m = \frac{M}{N_A}; \quad n = \frac{P_0}{kT_0}; \quad \left\langle v_x \right\rangle = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}. \tag{21}$$

В итоге получаем:

$$F = 4mn\left\langle v_{x0} \right\rangle uS = 4\frac{M}{N_A}\frac{P_0}{kT_0}\sqrt{\frac{RT_0}{M}} Su = 4P_0\sqrt{\frac{M}{RT_0}} Su. \tag{22}$$

2.3 Используя формулу (13), найдем изменение кинетической энергии молекулы при ударе (слагаемое пропорциональное u^2 можно опустить):

$$\Delta E_1 = \frac{m}{2}(v_{x0} + u)^2 - \frac{m}{2}(v_{x0})^2 = mv_{x0}u \tag{23}$$

Тогда за малый промежуток времени Δt изменение энергии всего газа равно (усреднение проводим сразу):

$$\Delta E_{\Sigma} = \left\langle \frac{1}{2} nSv_{x0}\Delta t \cdot mv_{x0}u \right\rangle = \frac{1}{2} mn\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle uS\Delta t = \frac{1}{2} mn\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle S\Delta x = \frac{1}{2} P_0 \cdot S\Delta x . \qquad (24)$$

Это же изменение энергии можно выразить через изменение абсолютной температуры газа:

$$\Delta E = \frac{3}{2} R\Delta T . \qquad (25)$$

Приравнивая эти выражения, находим изменение температуры газа:

$$\Delta T = \frac{1}{3} \frac{P_0 \cdot S\Delta x}{R} . \qquad (26)$$