Задание 11-1. «Кардиограмма» тепловой машины. (Решение).

Часть 1. Динамика цикла.

1.1 Из уравнения состояния идеального газа

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \qquad (1)$$

Следует, что в относительных единицах соотношение для параметров газа имеет вид

$$\frac{pv}{\tau} = 1. \qquad (2)$$

Поэтому значения давлений газа рассчитываются по формуле

$$p = \frac{\tau}{v}. \qquad (3)$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Значения объема и температуры.

$\frac{t}{t_0}$	$\frac{V}{V_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{P}{P_0}$
0,00	1,00	1,00	**1,00**
0,50	1,00	1,50	**1,50**
1,00	1,00	2,00	**2,00**
1,50	1,25	2,81	**2,25**
2,00	2,00	6,00	**3,00**
2,50	2,75	8,25	**3,00**
3,00	3,00	9,00	**3,00**
3,50	2,75	7,56	**2,75**
4,00	2,00	4,00	**2,00**
4,50	1,25	1,56	**1,25**
5,00	1,00	1,00	**1,00**

1.2 В условии задачи оговорено, что на каждом этапе цикла поршень движется с постоянным ускорением. Поэтому зависимость объема от времени описывается функцией

$$v = v_{k,0} + u_k (t - t_{k,0}) + \frac{a_k (t - t_{k,0})^2}{2}. \qquad (4)$$

На каждом этапе в таблице 1 приведены значения объемов в трех точках $v_{k,0}$ в начале этапа $t_{k,0}$;

$v_{k,1/2}$ в середине этапа $t_{k,0} + 1/2$; $v_{k,1}$ в конце этапа $t_{k,0} + 1$. Для этих моментов времени можно записать уравнения, следующие из формулы (4):

$$\begin{aligned} v_{k,1/2} &= v_{k,0} + \frac{1}{2} u_k + \frac{a_k (1/2)^2}{2} \\ v_{k,1} &= v_{k,0} + u_k + \frac{a_k}{2} \end{aligned}. \qquad (5)$$

Это система уравнений, из которой легко найти значения начальной скорости u_k и ускорения a_k на каждом этапе цикла. Результаты расчетов для функций $v(t)$ приведены в соответствующем столбце Таблицы 2.

Таблица 2. Функции зависимостей объема и давления от времени.

Интервал времени		$v(t)$	$p(t)$
Начало этапа $\frac{t}{t_0}$	Конец этапа $\frac{t}{t_0}$		
0	1	$v = 1$	$p = 1 + t$
1	2	$v = 1 + (t-1)^2$	$p = 2 + (t-1)^2$
2	3	$v = 2 + 2(t-2) - (t-2)^2$	$p = 3$
3	4	$v = 3 - (t-3)^2$	$p = 3 - (t-3)^2$
4	5	$v = 2 - 2(t-4) + (t-4)^2$	$p = 2 - 2(t-4) + (t-4)^2$

Для расчета зависимости давления от температуры можно поступить аналогично. Но нет гарантии, что на всех этапах эта зависимость описывается квадратичной функцией. Кроме того, для дальнейшего решения важно увидеть зависимость между давлением и температурой. Поэтому имеет смысл проанализировать каждый этап отдельно.

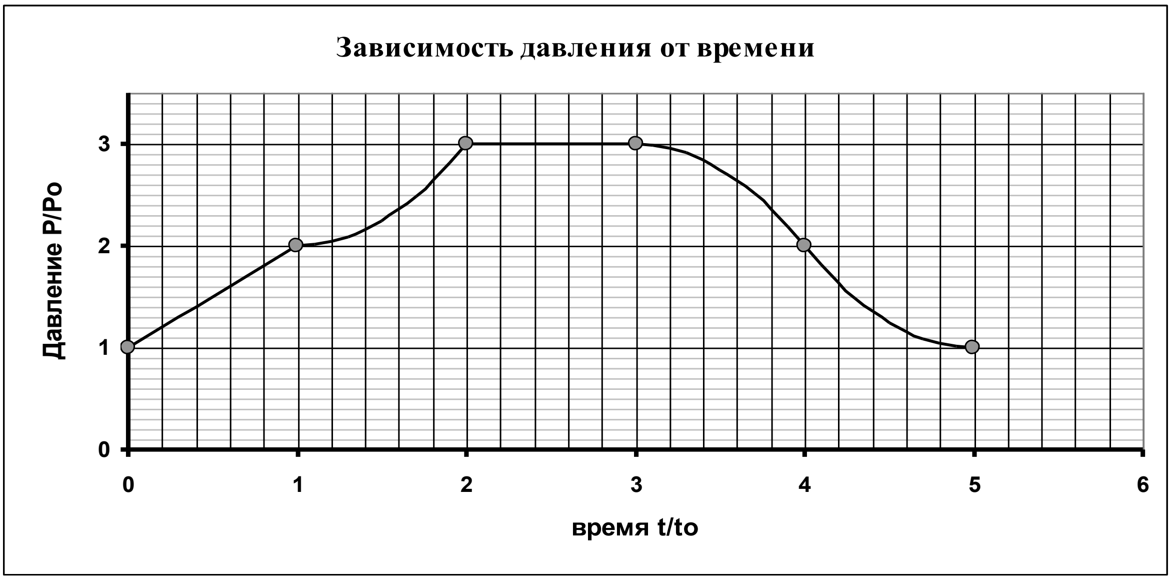
Этап 0-1. Объем остается постоянным (процесс изохорный при $v = 1$), поэтому $p = \tau$. Из таблицы 1 следует, что зависимость давления от времени линейна.

Этап 1-2. Из таблицы 1 следует, что на данном этапе $p = v + 1$.

Этап 2-3. Давление постоянно, т.е. процесс изохорный.

Этапы 3-4 и **4-5**. Видно, что на этих участках $p = v$.

1.3 График зависимости давления от времени показан на рисунке.



1.4 Мощность двигателя равна произведению давления газа на скорость изменения объема поршня

$$w = P\frac{\Delta V}{\Delta t}. \qquad (6)$$

Из графика зависимости объема от времени следует, что максимальная скорость изменения объема достигается в момент времени $t = 2$, т.к. в этот момент времени максимален коэффициент наклона касательной. Численное значение максимальной скорости изменения можно найти из формул для зависимости объема от температуры, приведенных в таблице 2:

$$\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{\max} = 2. \qquad (7)$$

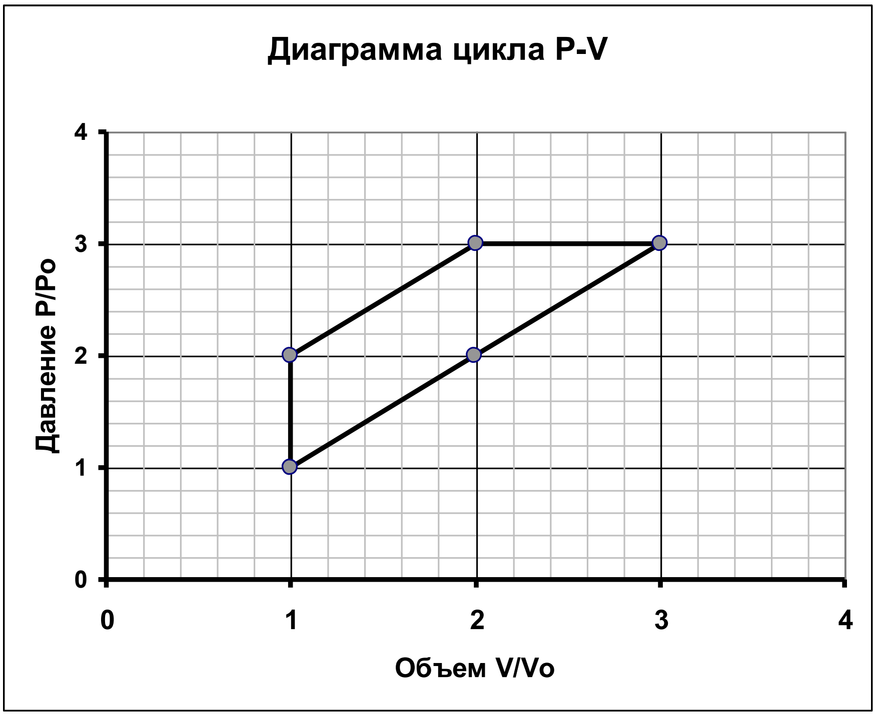
В этот же момент времени давление также максимально и равно $p = 3$. Следовательно, в единицах системы СИ максимальная мощность равна

$$w_{\max} = \left(P\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\max} = P_0 p_{\max}\frac{V_0}{t_0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t'}\right)_{\max} = 6\frac{P_0 V_0}{t_0} \qquad (8)$$

И достигается в момент времени

$$t^* = 2t_0. \qquad (9)$$

Часть 2. Термодинамика цикла.



2.1 На основании анализа, проведенного в п. 1.2, диаграмма цикла имеет вид, показанный на рисунке.

2.2 Изменение внутренней энергии одноатомного газа определяется формулой

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\Delta(PV) = \frac{3}{2}P_0V_0\Delta(pv) = \frac{3}{2}P_0V_0\Delta\tau \qquad (10)$$

Работа, совершенная газом, может быть рассчитана как площадь под графиком зависимости давления от объема. Для малого участка изменения объема эта работа равна

$$\delta A = P\Delta V = P_0V_0 p\Delta v. \qquad (11)$$

По первому закону термодинамики количество полученной теплоты равно сумме

$$\delta Q = \Delta U + \delta A. \tag{12}$$

Как следует из этих формул, все эти величины пропорциональны произведению P_0V_0, которое выступает в качестве единицы энергии в относительных единицах, принятых в этой задаче. Результаты расчетов по формулам (10) - (12) приведены в таблице 4.

Таблица 3. Термодинамические характеристики.

Интервал времени		Характеристики этапов		
Начало этапа $\frac{t}{t_0}$	Конец этапа $\frac{t}{t_0}$	Изменение энергии ΔU	Совершенная работа A	Полученная теплота Q
0	1	1,50	0,00	1,50
1	2	6,00	2,50	8,50
2	3	4,50	3,00	7,50
3	4	-7,50	-2,50	-10,00
4	5	-4,50	-1,50	-6,00
	Суммы	**0**	**1,5**	**17,5**

В последней ячейке приведена сумма теплот, полученных газом, т.е. только сумма положительных величин в столбце теплот.

2.3 По определению КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{1{,}5}{17{,}5} \approx 0{,}086 = 8{,}6\% . \tag{13}$$

2.4 Средняя мощность за цикл равна отношению совершенной за цикл работы к длительности цикла

$$\langle w \rangle = \frac{A}{t} = \frac{1{,}5P_0V_0}{5t_0} = 0{,}30\frac{P_0V_0}{t_0}, \tag{14}$$

Что в 20 раз меньше максимальной мгновенной мощности.