Задание 9-2. Водяное отопление. Решение.

1. Описание примитивного способа обогрева строится на примитивном уравнении теплового баланса:

$$C_0(t_0 - t) = 2C_0(t - t_1). \quad (1)$$

Их этого уравнения следует, что конечная температура комнаты равна

$$t = \frac{t_0 + 2t_1}{3} = 50°. \quad (2)$$

2. Пусть температура комнаты равна x_{k-1}, тогда его теплообмен с очередной порцией воды описывается следующим уравнением теплового баланса

$$C_0(x_{k-1} - x_k) = \frac{2C_0}{N}(x_k - t_1). \quad (3)$$

Перепишем это уравнение в виде «закона сохранения»:

$$x_{k-1} + \frac{2}{N}t_1 = \left(1 + \frac{2}{N}\right)x_k, \quad (4)$$

Из которого находим требуемую формулу

$$x_k = \frac{x_{k-1} + \frac{2}{N}t_1}{1 + \frac{2}{N}}. \quad (5)$$

3. Последовательный расчет по этой формуле дает следующие результаты. При разбиении на 2 порции конечная температура равна

$t^{(2)} = 55°$

При разбиении на 3 порции

$t^{(3)} = 57°$

4. Для получения формулы в общем виде запишем $x_k = t_1 + \Delta x_k$. Если подставить это выражение в уравнение (4), то после простых преобразований получим:

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_{k-1}}{1 + \frac{2}{N}}. \quad (6)$$

Таким образом, величины Δx_k образуют геометрическую прогрессию, поэтому

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_0}{\left(1 + \frac{2}{N}\right)^N}. \quad (7)$$

Или окончательно

$$t = x_N = t_1 + \frac{t_0 - t_1}{\left(1 + \frac{2}{N}\right)^N}. \quad (3)$$

5. Численные расчеты по этой формуле дают следующие результаты

N	1	5	10	50
t	50	58,84	60,31	61,56

Следовательно, можно считать, что максимальная температура при нагревании частями примерно равна $62°$.