

Задание 2. Кислород и водород – методы охлаждения (Решение).

1.1 Так как при расширении в пустоту газ работы не совершает, и теплообмен отсутствует, то внутренняя энергия остается постоянной. Поэтому

$$C_v T_0 - \frac{a}{V_0} = C_v T_1 - \frac{a}{V}. \quad (1)$$

Из этого уравнения находим изменение температуры газа

$$T_1 - T_0 = \frac{a}{C_v} \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \right). \quad (2)$$

Если газ идеальный, то $a = 0$, поэтому температура газа изменяться не будет $\Delta T = 0$. Для газа Ван-дер-Ваальса изменение температуры определяется формулой (2). Так как газ расширяется ($V > V_0$), то температура газа будет уменьшаться.

1.2 Для численного расчета изменения температуры необходимо знать объемы газов до и после расширения. Т.е. выразить объем газа через его температуру и давление. Для этого следует решить уравнение

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}. \quad (3)$$

Относительно величины V это уравнение является уравнением третьей степени, решение которого затруднительно. Оценим, можно ли при расчете объема пренебречь поправками Ван-дер-Ваальса. Так как начальное давление задано с точностью до 2 значащих цифр, то погрешность этого значения составляет величину порядка 5%. Следовательно, при расчетах допустимая погрешность также примерно равна 5%.

Рассчитаем значение объема газа, если считать его идеальным. В этом случае

$$V_0 = \frac{RT_0}{P_0} = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}. \quad (4)$$

Отношение для кислорода $\frac{b}{V_0} \approx 1,3 \cdot 10^{-2}$ (для водорода еще меньше), поэтому поправкой b можно пренебречь. Аналогично оценим второе слагаемое в уравнении (3):

$\delta P = \frac{a}{V_0^2} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Па}$, относительно давления газа эта величина составляет примерно

$\frac{\delta P}{P_0} \approx 0,02$, что также меньше допустимой погрешности расчетов, поэтому и этой поправкой

можно пренебречь. После расширения численные величины поправок будут вносить еще меньший вклад, поэтому ими также можно пренебречь. Подставим формулу для объема (4) в выражение (2):

$$T_1 - T_0 = \frac{a}{C_v} \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \right) = \frac{a}{C_v} \left(\frac{P_1}{RT_1} - \frac{P_0}{RT_0} \right). \quad (5)$$

В этом выражении второе слагаемое превышает первое примерно в 10 раз, поэтому изменение температуры можно оценить, пренебрегая первым слагаемым, эта оценка дает следующее значение

$$T_1 - T_0 = \frac{a}{C_v} \left(\frac{P_1}{RT_1} - \frac{P_0}{RT_0} \right) \approx -\frac{a}{C_v V_0} \approx 3 \text{ К}. \quad (6)$$

Таким образом, $\frac{\Delta T}{T_0} \approx 0,01$, поэтому в левой части формулы (5) можно положить $T_1 = T_0$,

тогда окончательно получим

$$T_1 - T_0 \approx \frac{a}{C_v} \left(\frac{P_1}{RT_0} - \frac{P_0}{RT_0} \right) \approx -\frac{a}{C_v RT_0} (P_0 - P_1). \quad (7)$$

Численные расчеты дают следующие значения

Для кислорода

$$\Delta T = -2,4K; \quad (8)$$

Для водорода

$$\Delta T = -0,43K. \quad (9)$$

Часть 2. Дросселирование.

2.1 В соответствии с первым законом термодинамики изменение внутренней энергии газа равно разности работы, совершенной поршнем П1 над газом $A_1 = P_1 V_1$ и работы, совершенной газом над поршнем П2 $A_2 = P_2 V_2$:

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2. \quad (10)$$

После перегордки газ подчиняется уравнению состояния идеального газа, поэтому

$$\begin{aligned} P_2 V_2 &= RT_2 \\ U_2 &= C_v T_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Также используем выражение для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса. Тогда уравнение (10) принимает вид

$$C_v T_2 - \left(C_v T_1 - \frac{a}{V_1} \right) = P_1 V_1 - RT_2. \quad (12)$$

Из уравнения Ван-дер-Ваальса получим

$$P_1 V_1 = RT_1 \frac{V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1}. \quad (13)$$

И продолжим преобразования формулы (12):

$$\begin{aligned} C_v T_2 - C_v T_1 + \frac{a}{V_1} &= RT_1 \frac{V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} - RT_2 \Rightarrow \\ (C_v + R)T_2 - C_v T_1 - RT_1 &= RT_1 \frac{V_1}{V_1 - b} - RT_1 - \frac{2a}{V_1} \Rightarrow \\ (C_v + R)(T_2 - T_1) &= RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \end{aligned} \quad (14)$$

Окончательно находим требуемую формулу для изменения температуры

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{C_v + R} \left(RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right). \quad (15)$$

2.2 Газ охлаждается, если $T_2 < T_1$, что выполняется, если

$$RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} < 0. \quad (16)$$

Или при

$$T_1 < \frac{2a}{Rb} \left(1 - \frac{b}{V_1} \right). \quad (17)$$

Эта температура будет максимальной, если $V_1 \gg b$. В этом случае

$$T_{1\max} < \frac{2a}{Rb}. \quad (18)$$

2.3 Подстановка численных значений дает следующие результаты

Для кислорода $T_{1\max} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ K}$;

Для водорода $T_{1\max} = 2,2 \cdot 10^2 \text{ K}$.

Обратите внимание, кислород в ходе дросселирования начинает охлаждаться при комнатной температуре, для охлаждения водорода при дросселировании его предварительно необходимо охладить до температуры порядка -100°C .