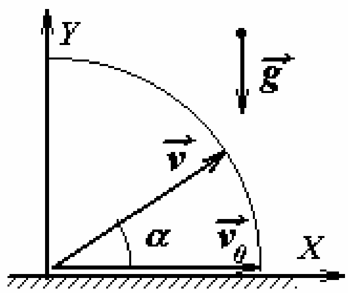
Гродно 1991г. (Решения)

9-1. Хорошо известно, что максимальная дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, достигается при угле вылета равном 45^o и определяется формулой

$$S = \frac{v_0^2}{g}. \qquad (1)$$

Из этой формулы можно найти скорость, которую катапульта сообщает камню

$$v_0 = \sqrt{gS} = 15 м/с.$$



Рассмотрим теперь полет камня, выпущенного из движущейся катапульты. Введем систему координат, оси которой: X — направлена горизонтально, а Y — вертикально. Начало координат совместим с положением катапульты в момент вылета камня.

Для вычисления вектора скорости камня необходимо учесть горизонтальную скорость движения катапульты $v = v_0$ Допустим, что катапульта выбрасывает камень под углом α к горизонту. Тогда компоненты начальной скорости камня в нашей системе координат могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} v_{x0} &= v_0 + v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} &= v_0 \sin\alpha \end{aligned}. \qquad (2)$$

Закон движения камня имеет вид

$$\begin{aligned} x &= v_{x0}t = v_0(1+\cos\alpha)t \\ y &= v_{y0}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}. \qquad (3)$$

Из второго уравнения системы (3) найдем время полета, положив $y = 0,$

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (4)$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы (3), получим дальность полета камня

$$S_1 = v_0\left(1+\cos\alpha\right)\frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (5)$$

Отвлечемся немного от решения данной конкретной задачи и порассуждаем о полученном выражении. Во-первых, если катапульта неподвижна ($v = 0$), то формула (5) переходит в известное выражение для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью под углом α к горизонту

$$S' = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}. \qquad (6)$$

Во-вторых, из (5) совсем не следует, что S_1 будет максимально при $\alpha = 45^0$ (это справедливо для (6), когда $v = 0$).

Предлагая эту задачу на республиканскую олимпиаду, авторы были убеждены, что девять десятых участников получат формулу (5) и затем подставят в нее значение $\alpha = 45^0$. Однако, к нашему сожалению, мы ошиблись: ни один из олимпийцев не усомнился в том, что максимальная дальность полета всегда (!) достигается при угле вылета, равном 45^o. Этот широко известный факт имеет ограниченные рамки применимости: он справедлив только, если: а) не учитывать сопротивление воздуха; б) точка вылета и точка падения находятся на одном уровне; в) метательный снаряд неподвижен.

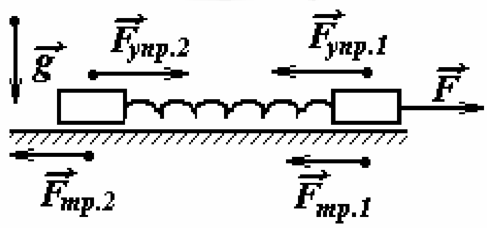
Вернемся к решению задачи.Итак, нам необходимо найти значение угла α, при котором S_1, определяемое формулой (5), максимально. Можно, конечно, найти экстремум функции, используя аппарат дифференциального исчисления: найти производную, положить ее равной нулю и, решив полученное уравнение, найти искомое значение α. Однако учитывая, что задача была предложена ученикам 9-х классов, мы дадим ее геометрическое решение. Воспользуемся тем обстоятельством, что $v = v_0 = 15 м/с$.

Расположим векторы $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ как показано на рис. Так как их длины равны, то вокруг них можно описать окружность с центром в точке *O*. Тогда длина отрезка *AC* равна $v_0 + v_0\cos\alpha$ (это есть v_{x0}), а длина отрезка *BC* равна $v_0 \sin\alpha$ (это v_{y0}). Их произведение равно удвоенной площади треугольника *ABC*, или площади треугольника ABB_1. Обратите внимание, что именно произведение $v_{x0}v_{y0}$ входит в выражение для дальности полета (5). Иными словами, дальность полета равна произведению площади ΔABB_1 на постоянный множитель $\frac{2}{g}$. А теперь зададимся вопросом: какой из вписанных в данную окружность треугольников имеет максимальную площадь? Естественно, правильный! Поэтому искомое значение угла $\alpha = 60^0$.

Вектор $\vec{AB}$ есть вектор полной начальной скорости камня, он направлен под углом 30^o к горизонту (опять же отнюдь не 45^o).

Таким образом, окончательное решение задачи следует из формулы (5), в которую следует подставить $\alpha = 60^0$.

$$S_1 = \frac{2v_0^2}{g}\left(1 + \cos 60^o\right)\sin 60^o = S\frac{3\sqrt{3}}{2} = 58{,}5 м.$$



9-2. Для того, чтобы сдвинуть тело 2 с места, необходимо приложить к нему горизонтально силу, которая превышает максимальную силу трения покоя, которая в данном случае равна

$$F_{тр.2} = \mu mg. \qquad (1)$$

В качестве силы, которая сдвигает это тело, выступает сила упругости пружин, модуль которой, согласно закону Гука, равен

$$F_{упр.} = k\Delta x, \qquad (2)$$

где k — жесткость пружины, Δx — ее удлинение.

Таким образом, необходимо удлинить пружину (т. е. сдвинуть тело 1) на величину

$$\Delta x = \frac{\mu mg}{k}. \qquad (3)$$

Если мы приложим к телу 1 постоянную силу $F,$ таким образом его движение не будет равноускоренным, так как на него действует, помимо постоянной силы трения $F_{тр.} = \mu mg,$ сила упругости $F_{упр.} = k\Delta x,$ которая не является постоянной. Качественно движение тела 1, при неподвижном теле 2, можно описать следующим образом. Если сила $\vec{F}$ по модулю превышает силу трения $\vec{F}_{тр.1},$ то тело начнет двигаться с положительным ускорением, при этом сила упругости начнет возрастать, в некоторой точке $F_{упр.}$ превысит разность $F - F_{тр.1}$, и ускорение изменит свой знак. Тело 1 еще некоторое время будет двигаться в положительном направлении и затем остановиться. Максимальная деформация пружины будет в момент остановки тела. Эту максимальную деформацию Δx_1 можно найти, воспользовавшись энергетическими соображениями: работа постоянной силы F числено равна изменению энергии пружины плюс работа силы трения. Кинетическая энергия тела в начальный и конечный моменты движения равна нулю.

$$F\Delta x_1 = \mu mg\Delta x_1 + \frac{k\left(\Delta x_1\right)^2}{2} \qquad (4)$$

или

$$F = \mu mg + \frac{k\Delta x_1}{2} \qquad (5)$$

Очевидно, что для ответа на поставленный в задаче вопрос следует положить в (5) $\Delta x_1 = \Delta x,$ определяемое (3). Окончательно получим

$$F = \mu mg + \frac{\mu mg}{2} = \frac{3}{2}\mu mg. \qquad (6)$$

Обратите внимание на два обстоятельства:

1. Искомая сила равна сумме силы трения, действующей на тело 1, и половине (!) силы трения, действующей на тело 2;

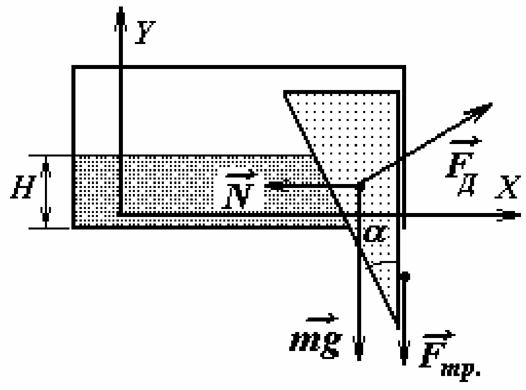
2. Ответ не зависит от величины жесткости пружины. Подумайте, как объяснить эти обстоятельства в том случае, когда жесткость пружины очень велика (скажем, вместо пружины металлический стержень).

Не объясняет ли данная задача старую бурлацкую песню "поддернем, поддернем, да ухнем!"?

9-3. Пусть в рассматриваемый момент уровень воды в аквариуме равен H. Тогда среднее давление жидкости на клин $P_{ср} = \frac{1}{2}\rho gH,$ соответственно средняя сила давления

$$F_Д = \frac{1}{2}\rho ghl\frac{h}{\cos\alpha}, \qquad (1)$$

где l — ширина клина. Сила $\vec{F}_Д$ стремится приподнять клин, а силы тяжести и трения препятствуют этому. Понятно, что если при некотором значении H клин все же будет приподнят, таким образом вода начнется выливаться из аквариума и клин опуститься.



Таким “автоколебательным” режимом и будет установлен возможный максимальный уровень жидкости в аквариуме.

Условие равновесия клина

$$m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_Д + \vec{N} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Атмосферным давлением, обратите внимание, мы, записывая (2), пренебрегли. Подумайте самостоятельно, почему оно не вошло в значение $P_{ср}$. В проекциях на оси OX и OY

$$F_Д \cos\alpha = N, \qquad (3)$$

$$F_Д \sin\alpha = mg + F_{тр}. \qquad (4)$$

В предельном случае (клин начинает подниматься)

$$F_{тр} = \mu N = \mu F_Д \cos\alpha.$$

И из (3)-(4) следует:

$$F_Д = \frac{mg}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = \frac{1}{2}\rho g \frac{l}{\cos\alpha} H^2,$$

откуда и получаем окончательный ответ

$$H = \sqrt{\frac{2mg}{\rho g l(tg\alpha - \mu)}}. \qquad (5)$$

Выясним, всегда ли справедлив ответ в форме (5). Подкоренное выражение не может быть отрицательным, поэтому сразу отмечаем, что (5) имеет смысл при $\mu < tg\alpha$. Физически это означает, что клин может быть поднят только не при очень сильном трении. А как быть при $\mu \geq tg\alpha$? Понятно, что в этом случае условие (4) будет выполнено при значении силы трения $F_{тр}$ меньше предельного (т. е. трением покоя). И воды, следовательно, можно наливать сколько угодно в аквариум — ее максимальный уровень уже будет определяться иными причинами (например, высотой стенок).

9-4. Для решения важно заметить, что не весь лед растаял. Таким образом, установившееся температура в системе $t_k = 0\,^oC.$ Из уравнения теплового баланса:

$$cM\left(t_B - t_K\right) = \lambda m, \qquad (1)$$

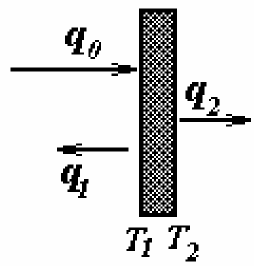
где m — масса растаявшего льда, M — масса (начальная) воды. Учет изменения объема

$$\frac{m}{\rho_Л} - \frac{m}{\rho_B} = bS; \quad \frac{M}{\rho_Л} + \frac{M}{\rho_B} = HS. \qquad (2)$$

Из (1), (2) получаем

$$t_B = \frac{\lambda\, B}{cH}\frac{\rho_B - \rho_Л}{\rho_B + \rho_Л} = 37{,}7\ ^0C$$

9-5. В этой задаче необходимо использовать разумные предложения (которые, впрочем, формулируется в форме строгих физических законов).



Пусть освещенная сторона пластинки поглощает в единицу времени энергию q_0. В состоянии теплового равновесия эта энергия излучается в окружающую среду как с освещенной (q_1), так и с затемненной (q_2) стороны. Причем можно считать, что количество отданной теплоты пропорционально разности температур поверхности и окружающего воздуха.

Запишем условия теплового баланса

$$q_0 = q_1 + q_2 = a\left(T_1 - T_0\right) + a\left(T_2 - T_0\right), \qquad (1)$$

где a — некоторая постоянная в рамках нашей задачи величина. Количество теплоты q_2, излучаемое затемненной стороной, переноситься внутри пластины. Этот поток теплоты пропорционален скорости изменения температуры с расстоянием

$$q_2 = \kappa\frac{T_1 - T_2}{d} = a\left(T_2 - T_0\right), \qquad (2)$$

где d — толщина пластины, κ — некоторый постоянный коэффициент (он называется теплопроводностью), зависящий от свойств материала, из которого изготовлена пластина. Аналогичные соотношения можно записать для пластины толщиной $2d$.

$$q_0 = a\left(T_1' - T_0\right) + a\left(T_2' - T_0\right), \qquad (3)$$

$$q_2' = \kappa \frac{T_1' - T_2'}{2d} = a\left(T_2' - T_0\right), \qquad (4)$$

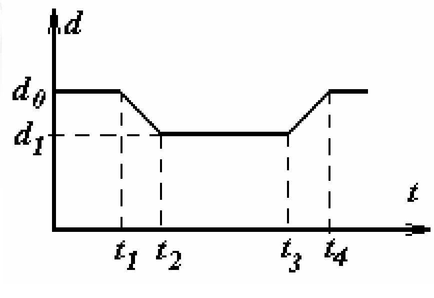
где T_2' и T_1' — температуры освещенной и неосвещенной сторон пластины вдвое большей толщины.

Совместное решение системы уравнений (1)-(4) приводит к результату

$$T_1' = \frac{\left(T_1 + T_2 - 2T_0\right)\left(2T_1 - T_2 - 2T_0\right)}{2\left(T_1 - T_0\right)},$$

$$T_2' = \frac{\left(T_2 - T_0\right)\left(T_1 + T_2 - 2T_0\right)}{2\left(T_1 - T_0\right)}.$$

10-1. С этим явлением каждый, наверняка, встречался в жизни, более того: оно иногда служит причиной аварийных ситуаций (для водителей, плохо знающих кинематику). Предположим, что мы сидим во втором автомобиле. Относительно нас впереди идущий автомобиль будет приближаться, въехав на "плохую" дорогу, затем остановиться (когда мы въедем на плохую дорогу) и, наконец, начнет восстанавливать прежнюю дистанцию, первым выехав на хорошую дорогу. Сказанное достаточно наглядно можно проиллюстрировать графиком зависимости относительного расстояния между автомобилями от времени:



t_1 — момент времени въезда 1-го автомобиля на плохую дорогу, t_2 — второго, t_3 — время въезда первого на хорошую и t_4 — второго.

Следовательно, искомый путь равен:

$$S = 2\left(d_0 - d_1\right),\; d_0 = l. \qquad (1)$$

а d_1 легко определим следующим образом

$$d_1 = d_0 - \left(v - \frac{v}{2} \right) \frac{l}{v} = d_0 - \frac{l}{2}. \qquad (2)$$

Из (1)-(2) находим

$$S = l.$$

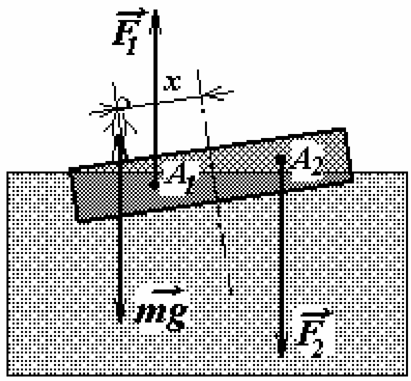
Следует заметить, что мы считаем автомобили материальными точками, что не совсем корректно. Например, если $\frac{S}{2}$ больше длины автомобиля, и просвета между ними нет, таким образом автомобили столкнуться (Соблюдай дистанцию!). Приведенное решение предполагает, что длина автомобиля много меньше l.

10-2. Обозначим через h высоту поверхности плота с человеком над водой. Когда человек находиться в центре плота условие равновесия плота выглядит следующим образом:

$$d^2(d-h)\rho_0 g = mg + a^2 d\rho g;$$

$$h = 0{,}01\ м;$$

$$\Delta V = a^2 h = 0{,}04\ м^3.$$



Если человек сместится на x параллельно ребру плота, и один край плота коснулся воды, таким образом другой поднялся на $2h.$ При равновесии сумма моментов всех сил относительно центра тяжести плота должна быть равна нулю. Это, кроме веса человека $m\vec{g},$ силы F_1 и F_2, точки приложения которых расположены на расстоянии трети высоты треугольников (точки A_1 и A_2 соответственно). Эти силы равны

$$F_1 = \rho_0 \Delta V g,\ F_2 = \rho \Delta V g.$$

Правило моментов дает

$$F_1 \frac{a\cos\alpha}{6} + F_2 \frac{a\cos\alpha}{6} = mgx\cos\alpha.$$

Откуда

$$x = \frac{(\rho + \rho_0)\Delta V a}{3m} = 0{,}6\ м$$

10-3. Запишем первое начало термодинамики

$$\Delta Q = \Delta U + A, \qquad (1)$$

где ΔQ — количество теплоты, сообщенное газу, ΔU — изменение его внутренней энергии, A — совершенная газом работа.

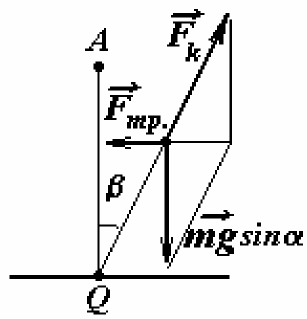
$$\Delta U = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1). \qquad (2)$$

$$A = \sum_i P_i \Delta V_i = \sum_i (P_0 + \alpha V_i)\Delta V_i = = (\eta - 1)V\frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{R}{2\eta}(\eta - 1)(\eta T_1 + T_2) \qquad (3)$$

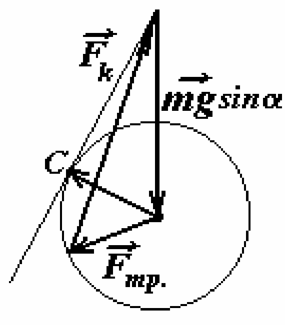
И с учетом (2) и (3)

$$\Delta Q = \frac{R}{2}\left[3(T_2 - T_1) + \frac{\eta - 1}{\eta}(\eta T_1 + T_2)\right] = 1520\ Дж.$$

10-4. Заметим, что искомый угол β – это угол между прямыми, которым принадлежат вектор $\vec{F}_k$ (силы Кулона) и проекция $m\vec{g}$ на наклонную плоскость.



Допустим, шайба находится в состоянии равновесия. Сумма сил, действующих на нее при этом, должна быть равна нулю. Для построения треугольника поступим следующим образом. Отложим постоянную компоненту $mg\sin\alpha$ первой, так как она не меняется при любых положениях шайбы. Теперь от конца вектора $mg\sin\alpha$ мы должны отложить вектор силы трения. Подчеркнем, что значение $\left|\vec{F}_{тр}\right| = \mu mg\cos\alpha,$ а направление его может быть любым, то есть множество концов всевозможных векторов $\vec{F}_{тр}$ образуют окружность. Вектор $\vec{F}_k$ должен замкнуть треугольник сил (иначе силы не уравновесят друг друга). Мысленно вращая $\vec{F}_{тр}$, видим, что максимальный угол реализуется



в случае касания $\vec{F}_k$ окружности сил трения (в точке С), то есть

$$\sin\beta = \frac{\mu mg\cos\alpha}{mg\sin\alpha} = \mu ctg\alpha,$$

следовательно,

$$\beta \le arcsin(\mu ctg\alpha).$$

Пользуясь изложенным подходом, можете попробовать определить вид области “покоя” шайбы на наклонной плоскости. (На границе области $\vec{F}_k$ будет направлен вдоль проекции силы тяжести на наклонную плоскость).

11-1. Для тепловой машины, работающей по идеальному тепловому циклу (циклу Карно) с температурами нагревателя T_H и холодильника T_X, коэффициент полезного действия можем рассчитать по формуле:

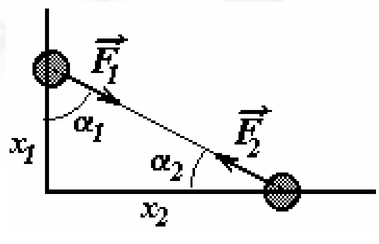
$$\eta = \frac{P}{Q_H} = \frac{T_H - T_X}{T_H} \approx \frac{21}{315},$$

$$P = \eta Q_H = \frac{\eta}{1-\eta} Q_X = \frac{T_H - T_X}{T_X} Q_X.$$

Если цикл обратить (то есть за счет мощности электродвигателя P забирать в единицу времени Q_X теплоты у комнаты и отдавать Q_H), то соотношения между механической и тепловой мощностями останутся прежними. Понятно, что в первом случае нужно забирать из комнаты на *150 Вт* меньше, чем после включения лампы:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = P_л\left(Q_{X_2} - Q_{X_1}\right)\frac{T_H - T_X}{T_X} = P_л \frac{T_H - T_X}{T_X} = 10{,}7\,Вт.$$

11-2. Пусть в некоторый момент одна бусинка находится на расстоянии x_1 от угла, вторая – на расстоянии x_2. Так как $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|$, то из второго закона Ньютона следует:



$$\left.\begin{aligned} m_1 a_1 = F_1 \cos\alpha_1 = F_1 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ m_2 a_2 = F_2 \cos\alpha_2 = F_2 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

то есть отношение ускорений равно отношению расстояний до вершины угла. За некоторый промежуток времени (малый) бусинки сместятся на Δx_1 и Δx_2 такие, что

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}, \qquad (1)$$

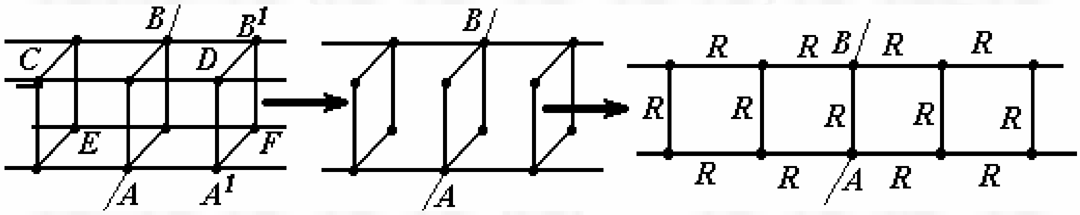
и в новом положении соотношение

$$\frac{a_1'}{a_2'} = \frac{x_1 - \Delta x_1}{x_2 - \Delta x_2} = \frac{x_1}{x_2} \qquad (2)$$

сохраняется.

Следовательно (вспомните гармонические колебания!), обе бусинки доберутся до угла одновременно.

11-3. При подключении источника напряжения между точками A и B схема оказывается симметричной относительно плоскости, содержащей ребра AA^1 и BB^1. Следовательно, ребра CD и EF являются эквипотенциальными и их можно «выбросить», так как ток по ним не течет. После этого схема упрощается.



Полученная схема состоит из 2 бесконечных цепочек, соединенных параллельно друг другу и резистора $R_{AB} = R$, параллельного им. Для вычисления сопротивления бесконечной цепочки r используем известный прием: сопротивление не поменяется, если уберем одно звено. Тогда:

$$r = 2R + \frac{Rr}{R + r}. \qquad (1)$$

И сопротивление всей цепи:

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R} + \frac{2}{r}. \qquad (2)$$

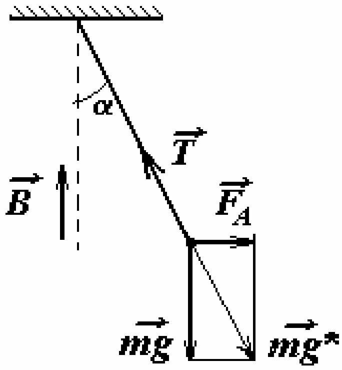
Из (1) и (2) получаем:

$$R^* \approx \frac{R}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58R.$$

11-4. Прежде всего определим новое положение равновесия стержня (при включении магнитного поля). Под действием силы Ампера нить отклониться на угол α такой, что

$$tg\alpha = \frac{F_A}{mg} = \frac{IBl}{mg}.$$

Можем считать, что система находиться в некотором «эффективном поле $\vec{g}*$», где вектор $\vec{g}*$ ориентирован под углом α к $\vec{g}$ и имеет величину

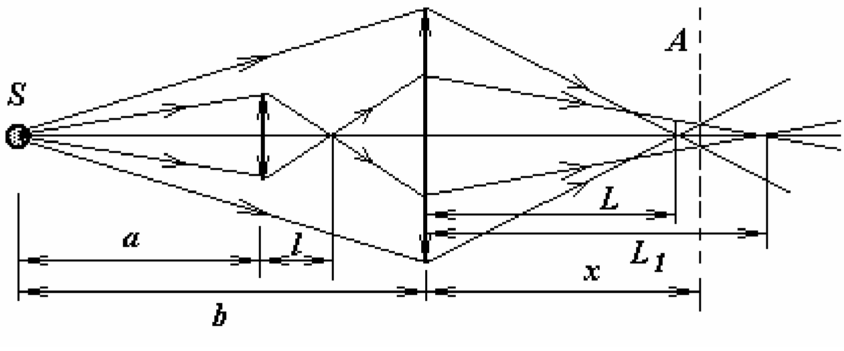


$$g* = \frac{\sqrt{(mg)^2 + F_A^2}}{m} = g\sqrt{1 + \left(\frac{IBl}{mg}\right)^2}.$$

Тогда искомый период найдем по аналогии

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g*}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\frac{IBl}{mg}\right)^2\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

11-5. После преломления лучей в малой линзе изображение источника оказывается между линзами на расстоянии: $\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{l} = \frac{1}{5}\right)$ $l = \frac{20}{3} см$.



А после преломления в большой линзе: $L = 140 см$.

Из анализа чертежа видно, что малая линза не полностью заслоняет большую, а значит, часть лучей от источника сразу преломляется в большой линзе. Причем после подобного преломления изображение оказывается за большой линзой на расстоянии

$$\frac{1}{50}+\frac{1}{L_1}=\frac{1}{20}\Rightarrow L_1=\frac{100}{3}\,см\ .$$

Минимальный внешний радиус пятна достигается при положении экрана в точке A. Пусть расстояние до плоскости A равно x. Тогда

$$D\frac{x-\frac{100}{3}}{\frac{100}{3}}=d\,\frac{30-\frac{20}{3}}{\frac{20}{3}}\,\frac{140-x}{140},$$

где D и d – диаметры линз. Из подобных геометрических рассуждений определим и диаметр пятна

$$d_x=D\frac{x-\frac{100}{3}}{\frac{100}{3}}=2{,}45\,см\,.$$