

Витебск, 1996. (Решения)

9-1. Задачу будем решать с использованием второго закона Ньютона. В проекции на горизонтальную ось имеем уравнение движения

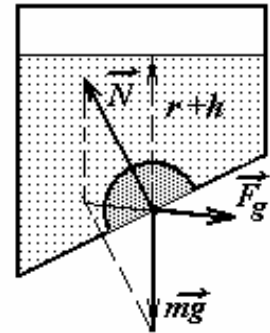
$$F_l - F_{mp} = ma. \quad (1)$$

Силу F_l , являющейся суперпозицией всех сил давления газа на оболочку, найдем из условия равновесия оболочки без отверстия: $F_l = ps$, где p — давление газа внутри баллона, а s — площадь отверстия. Сила трения равна μmg . Окончательно, ускорение в начальный момент времени равно

$$a = \frac{ps}{m} - \mu g. \quad (2)$$

Подставка исходных данных дает результат: $a = 8,8 \text{ м / с}^2$

9-2. Для решения задачи воспользуемся приемом дополнения. Заполним “вмятину” водой и закроем ее снизу крышкой, лежащей в плоскости остального дна. Ясно, что система будет в равновесии. Какие силы действуют на полусферу? Во-первых, сила тяжести $m\vec{g}$, во-вторых, сила реакции дна \vec{N} , равная по модулю силе давления всей жидкости на основании полусфер, в-третьих, это искомая сила \vec{F}_g давления жидкости на “вмятину”.



Имеем:

$$\vec{F}_g + m\vec{g} + \vec{N} = 0. \quad (1)$$

По правилу параллелограмма сила \vec{F}_g по модулю равна диагонали параллелограмма, построенного на векторах $m\vec{g}$ и \vec{N} . По теореме косинусов

$$F_g = \sqrt{(mg^2 + N^2 - 2mgN \cos \alpha)}. \quad (2)$$

Сила тяжести находится просто:

$$mg = \rho Vg = \rho \frac{2}{3} \pi r^3 g. \quad (3)$$

Для вычисления силы реакции опоры N надо использовать среднее значение давления на круглое основание данного объема.

$$N = \pi r^2 \rho g (h + r). \quad (4)$$

Подставляя эти выражения в формулу (2), получим искомый ответ $F_g \approx 25H$.

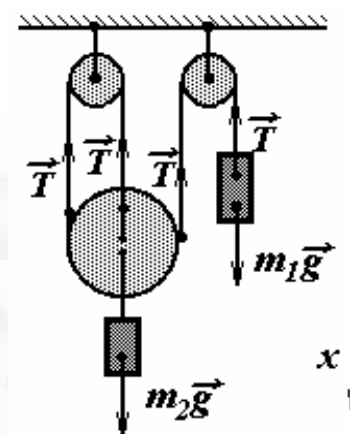
9.3 Обозначим все силы и запишем проекции сил действующих на тела m_1 и m_2 в проекциях на ось x :

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ m_2 g - 3T = -m_2 a_2' \end{cases} \quad (1)$$

Два уравнения содержат 3 неизвестные величины, поэтому необходимо еще установить связь между ускорениями первого и второго грузов. Несложно заметить, что подъем груза m_2 на высоту Δh за время Δt приведет к тому, что груз m_1 опустится на $3\Delta h$ за это же время, т. е. $a_1 = 3a_2$. Теперь легко решить систему (1), исключив силу натяжения нити T :

$$a_2 = \frac{3m_1 - m_2}{9m_1 + m_2} g; \quad a_1 = 3a_2.$$

Расчет дает: $a_2 = 9,0 \text{ м} / \text{с}^2, a_1 = 3,0 \text{ м} / \text{с}^2$.



9-4. Задача взята из практики — попробуйте обычным кипятивником закипятить воду в трехлитровой банке! Итак речь идет о рассеивании тепла в окружающее пространство. В состоянии термодинамического равновесия вся подводимая мощность рассеивается, т. е.

$$\frac{U^2}{R} = k(t - t_0), \quad (1)$$

где k — некоторый постоянный коэффициент, зависящий от формы и размеров сосуда, свойств окружающей среды. Чтобы нагреть воду до $t_1 = 100^\circ \text{C}$ нужно увеличить мощность подачи тепла в систему. Это означает уменьшить сопротивление

$$\frac{U^2}{R_1} = k(t_1 - t_0). \quad (2)$$

Разделив (1) на (2), получим

$$\frac{R_1}{R} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}. \quad (3)$$

Поскольку R пропорционально l , то отношение $\frac{R_1}{R}$ равно отношению

длин проволок.

Окончательно,

$$\frac{l_1}{l} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \quad (4)$$

или в числах $\frac{R_l}{R} = 0,31$. Следовательно, правильный ответ таков: длину спирали надо уменьшить на 69% и более, так как на самом деле в (12)-(14) знак равенства нужно заменить на соответствующие знаки \geq и \leq .

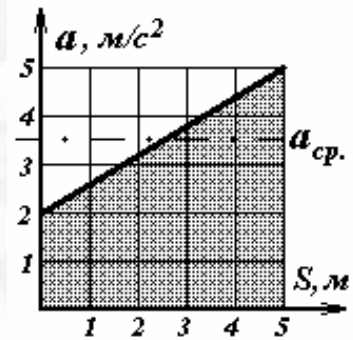
9-5. Задача решается весьма просто, если обратить внимание, на то, что площадь под кривой ускорения в зависимости от пути численно равна половине разности квадратов скоростей:

$$aS = \frac{v^2 - v_0^2}{2}. \quad (1)$$

Это очевидно для равноускоренного движения; для переменного движения достаточно разбить весь график на маленькие прямоугольники и просуммировать их площади. Другими словами, если усреднить ускорение по пути (значение $\bar{a} = 3,5 \text{ м/с}^2$ обозначено на рисунке пунктиром), то из (1) следует окончательное выражение:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\bar{a}S},$$

численное значение $v = 6,0 \text{ м/с}$.



10-1. Поскольку цилиндры шероховатые, то при движении балки раскручиваются цилиндры, находящейся под ней, на что расходуется потенциальная энергия опускающейся балки. В идеализированном варианте после прохождения балки будут вращаться все цилиндры прокатного стана. Это обстоятельство и приводит к тому, что в конце концов движение станет равномерным.

Для решения задачи воспользуемся энергетическими соображениями. Пусть искомая скорость v . За время τ ($\tau \gg \frac{l}{v}$) балка пройдет по стану путь $S = v\tau$, при этом освободится потенциальная энергия

$$E^n = Mgv\tau \sin \alpha. \quad (1)$$

При этом раскручивается до прекращения проскальзывания $N = \frac{v\tau}{l}$

новых цилиндров, кинетическая энергия которых

$$E^k = N \frac{I}{2} m v^2. \quad (2)$$

При записи (1) учтено, что цилиндры тонкостенные и все точки цилиндров имеют одинаковую скорость. Для корректного решения задачи необходимо учесть неизбежное выделение теплоты при проскальзывании и трении балки о цилиндры. Для вычисления этой энергии заметим, что (2) аналогично выражению для кинетической энергии материальной точки, поэтому рассмотрим шайбу массы m аккуратно, (т. е. без начальной скорости) положенную на шероховатую горизонтальную ленту транспортера, движущуюся со скоростью v . Под действием трения скольжения шайба начнет набирать скорость с ускорением $a = \mu g$, а через время $\tau^* = \frac{v}{\mu g}$ трение скольжения исчезнет.

При этом выделится теплота:

$$Q = \sum_i F_{mp} v_i \Delta t_i = F_{mp} \sum_i v_i \Delta t_i = \{v = at\} = F_{mp} \frac{v}{2} \tau^*. \quad (3)$$

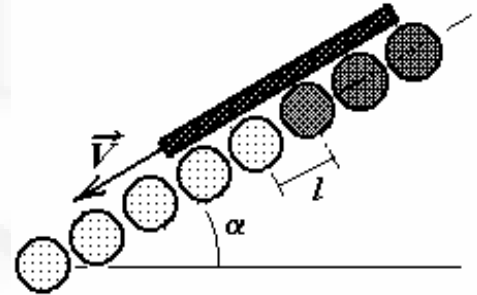
С другой стороны, согласно основному закону динамики в импульсной форме:

$$mv = F_{mp} \tau^*. \quad (4)$$

Из (3)-(4) легко находим:

$$Q = \frac{1}{2} mv^2.$$

Таким образом мы показали, что при разгоне трением скольжения, энергетические (тепловые) потери равны кинетической энергии тела в конечном состоянии, т. е. пренебрегать ими нельзя. Возвращаясь к цилиндрам, заметим, что все вышесказанное будет справедливо, если балка достаточно длинна, т. е. иначе $\tau^* < \frac{L}{v}$ (чтобы проскальзывание успело исчезнуть). На рисунке раскрученные цилиндры заштрихованы, а раскручивающиеся — нет.



С учетом изложенного баланс энергий запишется в виде

$$E^n = E^k + Q = 2E^k = mv^2 N. \quad (5)$$

Далее

$$Mgv \tau \sin \alpha = \frac{v \tau}{l} mv^2. \quad (6)$$

Откуда

$$v^2 = gl \frac{M}{m} \sin \alpha \Rightarrow v = \sqrt{gl \frac{M}{m} \sin \alpha}. \quad (7)$$

10-2. Будем считать, что хаотически прыгающие шарики движутся вертикально.

Столкновения можно не принимать во внимание, так как они не изменяют распределение скоростей шариков. Рассмотрим систему за время τ , равное времени полета некоторого фиксированного шарика

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,639 \text{ с.} \quad (1)$$

Воспользуемся вторым законом Ньютона в импульсной форме, учитывая, что за время τ соударения с дном испытывают все шарики системы. Импульс шарика у дна:

$$P = m\sqrt{2gh} \quad (2)$$

Изменение импульса системы за время τ

$$\Delta P = N \cdot 2P = 2Nm\sqrt{2gh} \quad (3)$$

Тогда искомое среднее давление определим из равенства

$$P_{cp} a^2 \tau = \Delta P \Rightarrow P_{cp} = \frac{\Delta P}{a^2 \tau} = \frac{Nmg}{a^2} = 49 \text{ Па} \quad (4)$$

Приведем более изощренный способ решения этой задачи. Так как в среднем положение центра масс всех шариков не изменяется, то сумма внешних сил, действующих на все шарики равна нулю. Такими внешними силами являются сила тяжести Nmg и сила реакции дна сосуда, которая по третьему закону Ньютона равна силе давления (естественно, средней) шариков на дно Pa^2 , приравнявая эти выражения сразу получим окончательный результат (4).

10-3. “Изюминка” задачи заключается в том, что по мере вхождения (или выхода) плотно пригнанной пробки сила трения не остается постоянной (вспомните свои “экспериментальные” усилия).

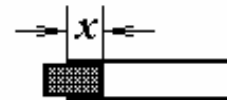
Будем считать, что сила трения, действующая на пробку, прямо пропорциональна длине части пробки в бутылке:

$$F_{mp} = \alpha x. \quad (1)$$

Тогда работа этой силы на том же расстоянии

$$A_{mp} = \sum_i F_{mp}^2 \Delta x_i = \frac{\alpha x^2}{2}. \quad (2)$$

В случае с одной пробкой



$$A_{mp} = Q = (c_1 + c_2)\Delta T = \frac{\alpha l^2}{2}, \quad (3)$$

где l — длина пробки.

При добавлении еще одной пробки следует помнить, что работа в этом случае (первая пробка уже вся в бутылке, т. е. $F_{mp} = \alpha x = const$)

$$A_{mp}^* = \frac{\alpha l^2}{2} + \alpha \cdot l \cdot l = 3\alpha \frac{l^2}{2}, \quad (4)$$

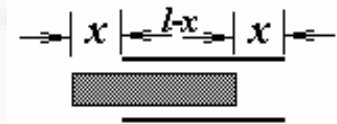
$$A_{mp}^* = c_2(\Delta T + \Delta T^*) + (c_2 + c_1)\Delta T^* = 3(c_1 + c_2)\Delta T,$$

где ΔT^* — искомое повышение температуры. Из (4) находим

$$\Delta T^* = \Delta T \frac{3c_1 + 2c_2}{2c_2 + c_1} = \Delta T \frac{3\xi + 2}{\xi + 2} = 4,0 \text{ K.}$$

10-4. Пусть в некоторый момент из конденсатора вынули часть пластины длиной x . Тогда емкость образовавшейся батареи

$$C = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon a(a-x)}{d(\varepsilon + 1)} + \frac{\varepsilon_0 ax}{d}. \quad (1)$$



Заряд конденсатора в этот момент времени

$$Q = CU = U \frac{\varepsilon_0 a}{d} \frac{2\varepsilon(a-x) + x(\varepsilon + 1)}{\varepsilon + 1}. \quad (2)$$

Соответственно, ток

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = U_0 \frac{\varepsilon_0 a}{d} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} v.$$

Искомое количество теплоты

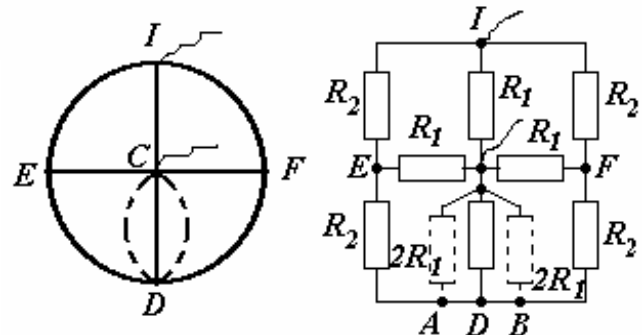
$$Q = I^2 R \frac{a}{v} = U_0^2 \frac{\varepsilon_0^2 a^3}{d^2} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^2 v R. \quad (3)$$

10-5. Схема состоит из резисторов двух типов: типа “радиус” $R_1 = 2,5 \text{ ом}$ и типа “дуга” $R_2 = 3,93 \text{ ом}$.

$R_2 = 3,93 \text{ ом}$.

Один из вариантов решения: представить резистор CD как два параллельно соединенных резистора $2R_1$.

Далее перемычку AB можно убрать, так как точки A и B



эквипотенциальны (симметричны относительно оси симметрии проходящей через клеммы). Далее можно без труда “свернуть” схему по стандартным правилам:

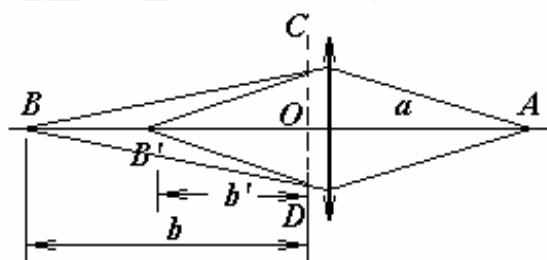
$$R = 1,40 \text{ м.}$$

11-1. Если с разной стороны линзы находятся среды с различными средями преломления, то формула линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

оказывается неприменимой, более того, фокусы будут находиться на разных расстояниях от линзы.

Модифицируем (1) применительно к данной задаче. Для этого предположим, что между линзой и водой находится тонкий воздушный промежуток, на границе которого лучи испытывают дополнительные преломления.



В отсутствие преломляющей границы, изображение находилось бы в точке B' , на расстоянии $|OB'| = b'$, для которого (1) справедлива. Дополнительное преломление смещает изображение в точку B (расстояние $|OB| = b$). Из треугольников COB и COB' , используя закон преломления, нетрудно получить (в параксиальном приближении)

$$\frac{b}{b'} = n.$$

Тогда (1) можно записать в виде

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{f}. \quad (2)$$

Аналогично, для предмета, находящегося в воде на расстоянии a_1 , справедливо выражение

$$\frac{n}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}. \quad (3)$$

(Заметим: f в (2), (3) фокусное расстояние для линзы, находящейся в воздухе).

Из (2) и (3) можно найти

$$b_1 = \frac{aa_1b}{a_1b + na(a_1 - b)}. \quad (4)$$

11-2. При повороте диска на малый угол α вокруг собственной оси он приподнимается на высоту

$$h \approx l - \sqrt{l^2 - (R\alpha)^2} \approx \frac{R^2\alpha^2}{2l}.$$

Потенциальная энергия при этом увеличивается на

$$\Delta E_n = mg \frac{R^2\alpha^2}{2l}.$$

При вращении диска с угловой скоростью ω , его кинетическая энергия равна

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J — постоянный коэффициент (момент инерции), зависящий от распределения масс. Закон сохранения энергии при вращательных колебаниях записывается в виде

$$\frac{J\omega^2}{2} + mg \frac{R^2\alpha^2}{2l} = const. \quad (1)$$

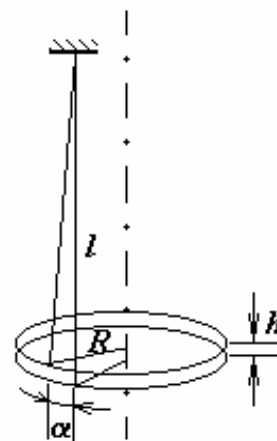
Проводя аналогию с колебаниями груза на пружине

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const, \quad (2)$$

можно выразить период колебаний диска

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Jl}{mgR^2}}. \quad (3)$$

Если на диск положить груз, как сказано в условии задачи, то выражение для кинетической энергии (момент инерции J) не изменится, так как скорость груза, находящегося на оси вращения, равна нулю. Масса же системы увеличится в два раза, следовательно, согласно (3), период колебаний уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

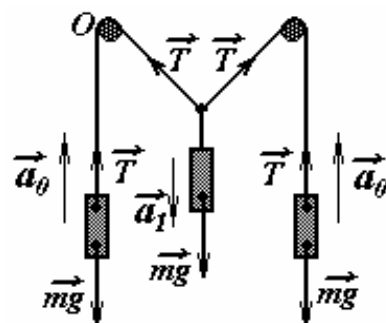


11-3. Обозначим расстояние между блоками $2l$. Запишем уравнения второго закона

Ньютона для двух грузов

$$\begin{aligned} T - mg &= ma_0, \\ mg - T\sqrt{2} &= ma_1. \end{aligned} \quad (1)$$

(Чтобы не усложнять формулы мы сразу учитываем, что нить изогнута под прямым углом).



Установим связь между величинами ускорений грузов a_0 и a_1 .

Представим движение центрального груза как суперпозицию двух движений: вращения вокруг точки O со скоростью \vec{v}'_1 направленной перпендикулярно нити; увеличение радиуса вращения со скоростью \vec{v}''_1 , направленной вдоль нити.

Очевидно, что $|\vec{v}'_1| = v_0$ — скорости бокового груза.

Так как, сумма скоростей \vec{v}'_1 и \vec{v}''_1 направлена вертикально вниз (это скорость груза \vec{v}_1), то

$$|\vec{v}'_1| = |\vec{v}''_1| = v_0 \text{ и}$$

$$v_1 = v_0 \sqrt{2}. \quad (2)$$

Согласно разложению движения на составляющие, разложим и ускорение центрального груза.

Вращательному движению соответствует центростремительное ускорение \vec{a}_{1c} ,

направленное вдоль нити (равное $\frac{v_0^2}{l\sqrt{2}}$), и тангенциальное $\vec{a}_{1\tau}$, направленное перпендикулярно нити. Увеличению длины нити соответствует ускорение \vec{a}''_1 , направленное вдоль нити и равное по модулю a_0 — ускорению бокового груза. Следовательно, модуль полного ускорения

$$a_1 = \left(a_0 - \frac{v_0^2}{l\sqrt{2}} \right) \sqrt{2}. \quad (3)$$

Заметим, что эти же соотношения между скоростями и ускорениями грузов можно получить с помощью операции дифференцирования.

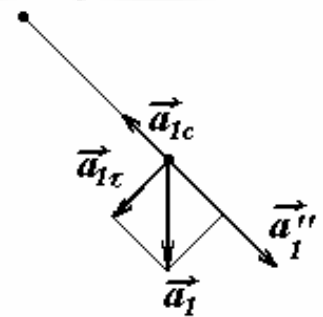
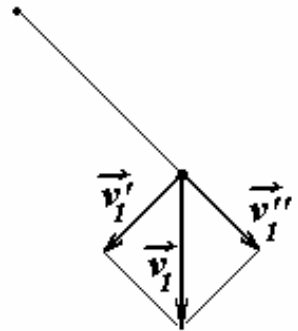
Запишем закон сохранения энергии для того, чтобы выразить скорость центрального груза

$$2 \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} = mgl - 2mgl(\sqrt{2} - 1). \quad (4)$$

Решая совместно (2)-(4) можно найти $a_1 = -\frac{g}{4}$, то есть ускорение направленно вверх.

11-4. Индукция магнитного поля внутри катушки

$$B = \mu_0 nI = \frac{\mu_0 I}{d}. \quad (1)$$



Чтобы исключить “самовоздействие”, при вычислении силы, действующей на участок проволоки, необходимо уменьшить величину индукции в два раза

$$B' = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{d}. \quad (2)$$

Мысленно выделим кусочек витка проволоки, видимый из центра под малым углом α .

Сила Ампера, действующая на его

$$F_A = IB' \Delta l = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2}{d} R \alpha, \quad (3)$$

уравновешивается силами упругости

$$T = \sigma \frac{\pi d^2}{4},$$

(σ — механическое напряжение

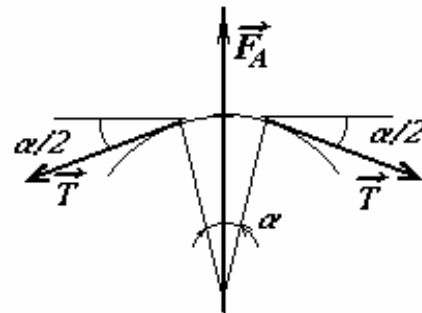
внутри провода) направленными под небольшими углами $\frac{\alpha}{2}$ к

направлению силы Ампера

$$\frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2}{d} R \alpha = 2\sigma \frac{\pi d^2}{4} \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Полагая σ равным предельному механическому напряжению, из (4) находим

$$I = \sqrt{\frac{\sigma \pi d^3}{2\mu_0 R}}.$$



11-5. Так как теплопроводности стержней одинаковы, то температура вдоль стержней будет изменяться по линейному закону. Температура точки соединения стержней T_3 может быть найдена из соотношения

$$T_3 = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l_1 - l_2} l_1 = \frac{T_1 l_2 + T_2 l_1}{l_1 + l_2}, \quad (1)$$

при выводе, которого считается, что удлинения стержней малы. Теперь не трудно вычислить средние температуры стержней

$$T_{cp1} = \frac{T_1 + T_3}{2}, \quad T_{cp2} = \frac{T_3 + T_2}{2}. \quad (2)$$

Удлинения стержней пропорциональны изменению температуры $\Delta l = k \Delta T$,

причем коэффициенты пропорциональности следует выразить через приведенные в условии данные

$$k_1 = \frac{L_1 - l_1}{T_2 - T_1}, k_2 = \frac{L_2 - l_2}{T_2 - T_1}. \quad (3)$$

Окончательно, получим искомую длину

$$l = l_1 + k_1(T_{cp1} - T_1) + l_2 + k_2(T_{cp2} - T_1),$$

где все параметры этого выражения известны.