Могилев 1997. (Решения)

9-1. Так как заранее нельзя предсказать, в каком состоянии будет находиться вода в сосуде, то при решении задачи необходимо сразу проводить вычисления количеств теплоты. При конденсации пара может выделится

$$Q_0 = rm_п = 11,5кДж.$$

На нагревание льда до температуры плавления требуется

$$Q_1 = c_л m_л \Delta t_л = 210 Дж \qquad (Q_1 < Q_0);$$

для таяния льда -

$$Q_2 = \lambda m_л = 3,3кДж \qquad (Q_1 + Q_2 < Q_0);$$

на нагревание воды до кипения

$$Q_3 = c_в m_л \Delta t_в = 4,2кДж \qquad (Q_1 + Q_2 + Q_3 < Q_0).$$

Таким образом, теплоты,выделившейся при конденсации пара хватает на нагревание льда, его плавление, и нагрев образовавшейся воды до температуры кипения, следовательно,сконденсируется только часть пара массой

$$\Delta m = (Q_1 + Q_2 + Q_3) / r = 3.4 \cdot 10^{-3} кг.$$

Таким образом, в сосуде будет находиться $m_в + \Delta m = 13.4г$ воды при $100^0 C$ и $m_п - \Delta m = 1.6г$ пара при той же температуре.

9-2 .Пока отдача тепла мала (мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур и площади поверхности) проводник нагревается, его сопротивление растет, тепловая мощность $\dfrac{U^2}{R_0(1+\alpha\Delta t)}$ падает. Стационарное состояние характеризуется равенством мощностей тепловыделения и рассеяния. Поэтому запишем дважды эти равенства для первого и второго случаев

$$\frac{U^2}{R_0(1+\alpha\Delta t_1)} = k\Delta t_1 S, \qquad \frac{U^2}{R_0(1+\alpha\Delta t_2)} = k\Delta t_2 \frac{S}{2},$$

где k - некоторый коэффициент пропорциональности.

Отсюда, разделив левые части на правые, получаем квадратное уравнение

$$(\Delta t_2)^2 + \frac{1}{\alpha}\Delta t_2 - \frac{4}{\alpha}(1+\alpha\Delta t_1)\Delta t_1 = 0$$

Один из корней квадратного уравнения отрицательный и смысла не имеет, а второй дает требуемый ответ: проводник нагреется на $261K$.

9-3. Мы имеем типичный пример системы, самостоятельно приходящей в состояние динамического равновесия. Вначале бусинка разгоняется, растет скорость, а вместе с ней и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно касательной к участку спирали, следовательно, возрастает и сила трения $\vec{F}$, направленная вдоль касательной к траектории в сторону противоположную скорости, причем модуль этой силы определяется известным законом $F = \mu N$. Через определенное время бусинка будет двигаться с установившейся скоростью . Опустившись на один виток, бусинка расходует запас потенциальной энергии на работу против сил трения (кинетическая энергия при этом больше не меняется)

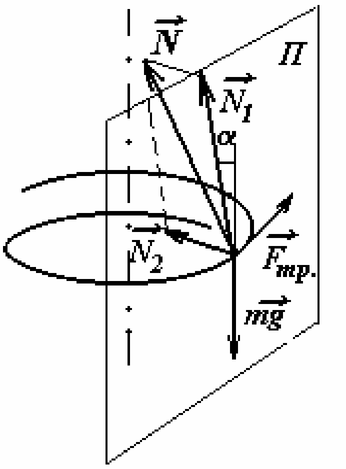
$$mgH = FS = \mu N\sqrt{4\pi^2 R^2 + H^2}, \qquad (1)$$

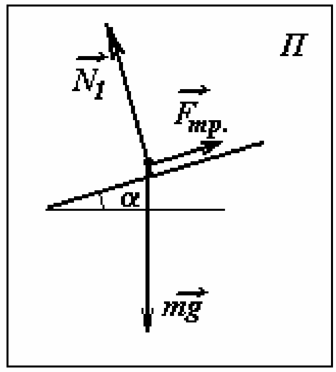
где $S = \sqrt{4\pi^2 R^2 + H^2}$ - длина одного витка спирали.

Разложим силу реакции $\vec{N}$ на две составляющие :

$$N_1 = mg\cos\alpha$$

- в вертикальной плоскости $\boldsymbol{\Pi}$, касательной к участку спирали, и





$$N_2 = \frac{m(v\cos\alpha)^2}{R}$$

- в горизонтальной плоскости. Выражения для этих компонент получены из следующих рассуждений: в вертикальном направлении движение бусинки является равномерным со скоростью $v\sin\alpha$, следовательно в проекции на любую ось, лежащую в вертикальной плоскости, касательной к траектории сумма всех проекций сил, действующих на бусинку, равна нулю; в горизонтальной плоскости движение бусинки является равномерным движением по окружности радиуса R со скоростью $v\cos\alpha$, следовательно, бусинка движется с центростремительным ускорением, которое ей сообщает компонента силы реакции N_2. Таким образом, модуль силы реакции определяется выражением

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{m^2 g^2 \cos^2\alpha + \frac{m^2 v^4 \cos^4\alpha}{R^2}}. \qquad (2)$$

В этих выражениях α - угол между касательной к траектории и спиралью. Из простых геометрических построений находим

$$tg\alpha = \frac{H}{2\pi R},\ cos\,\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{4\pi\ R^2}{4\pi^2 R^2 + H^2}. \qquad (3)$$

Подставляя полученные выражения в (1), получаем уравнение относительно скорости v

$$\frac{g^2 H^2}{\mu^2} = 4\pi^2 R^2 g^2 + \frac{16 v^4 \pi^4 R^2}{4\pi^2 R^2 + H^2}.$$

Разрешая уравнение, находим искомую скорость установившегося движения бусинки

$$v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt[4]{\left(4\pi^2 R^2 + H^2\right)\left(\frac{H^2}{\mu^2} - 4\pi^2 R^2\right)}.$$

9-4. .Выберем начало системы отсчета на башне, задачу будем решать в векторном виде. К моменту вылета второго камешка первый совершит перемещение

$$\Delta\vec{r}_0 = \vec{v}_0\Delta t + \frac{\vec{g}\Delta t^2}{2}$$

и будет двигаться со скоростью

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\Delta t.$$

Перемещения камешков после бросания второго камешка запишутся следующим образом

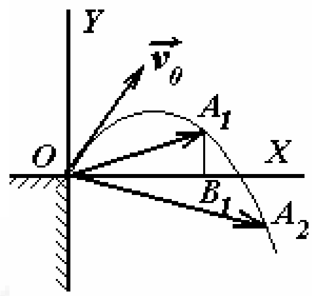
$$\Delta\vec{r}_1(t) = \vec{v}_0(t+\Delta t) + \frac{\vec{g}(t+\Delta t)^2}{2},$$

$$\Delta\vec{r}_2(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную со вторым камешком. Тогда относительное положение первого камешка задается вектором

$$\vec{S} = \Delta\vec{r}_1(t) - \Delta\vec{r}_2(t) = \vec{v}_0\Delta t + \frac{\vec{g}\Delta t^2}{2} + \vec{g}\Delta t\cdot t = \Delta\vec{r}_0 + \vec{g}\Delta t\cdot t,$$

т.е. это движение вертикально вниз со скоростью $\vec{g}\Delta t$. Поэтому



1)если Δt таково, что первый камушек не успел опуститься ниже горизонта точки бросания (точка A_1), тогда наименьшее расстояние будет равно

$$CB_1 = \left(\Delta\vec{r}_0\right)_x = \left(\vec{v}_0\Delta t + \frac{\vec{g}\Delta t^2}{2}\right)_x = v_0\cos\alpha\Delta t\,. \qquad (1)$$

Оно будет достигнуто в момент, когда оба шарика будут на одной высоте, т.е.

$$S_y = 0 = \left(\Delta\vec{r}_0\right)_y - g\Delta t\cdot t = v_0\sin\alpha\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2} - g\Delta t\cdot t\,,\quad t = \frac{v_0\sin\alpha}{g} - \frac{\Delta t}{2} \qquad (2).$$

2)если Δt таково, что первый камушек опустился ниже горизонта бросания (A_2), наименьшим расстоянием будет начальное, т.е.

$$OA_2 = \left|\Delta\vec{r}_0\right| = \sqrt{\left(v_0\cos\alpha\Delta t\right)^2 + \left(v_0\sin\alpha\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2}\right)^2}\,, \qquad (3)$$

а момент времени $t = 0.$ (4)

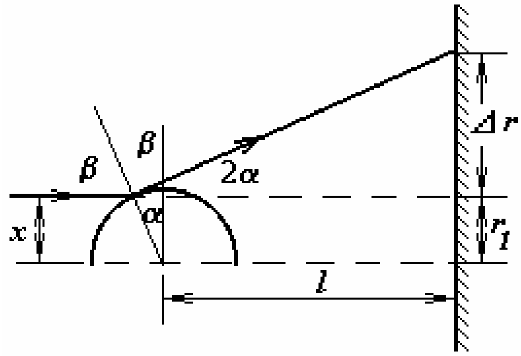
Условие выбора ответа следует из (2): если $\Delta t > \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$, то ответ - (3),(4),

если $\Delta t < \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$, то - (1),(2).

9-5. .Небольшая тень по центру означает, что шарик имеет размеры, ненамного превышающие диаметр пучка света (подумайте почему?). Рассмотрим крайний луч. Для него β - угол падения и $\alpha + \beta = \pi/2$. Следовательно, после отражения луч отклонится на угол 2α, причем

$$tg2\alpha = \frac{\Delta r}{x\sin\alpha + l}.$$

Ясно, что поскольку $\Delta r = 1см$, а $l = 1м$, то угол α - мал, и $x\sin\alpha$ можно опустить в знаменателе, тогда



$$tg2\alpha \approx 2\alpha \approx \Delta r / l; \Rightarrow \alpha \approx \Delta r / 2l \approx 0.5 \cdot 10^{-2}$$

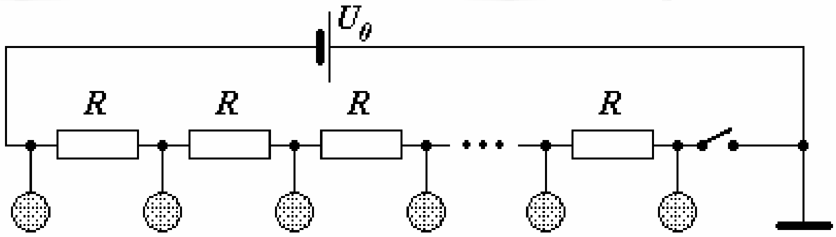
Как видно из рисунка

$$x = r_1 \cos\alpha \approx r_1(1 - \alpha^2 / 2)$$

Таким образом диаметр шарика примерно равен $2см$ (немного меньше).

10-1. Как следует из схемы цепи до замыкания ключа потенциалы всех шариков относительно бесконечности или относительно заземленной положительной пластины источника питания одинаковы и равны

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{N+1} = -U_0 \qquad (1)$$



Учитывая, что емкость уединенного шара

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

(по условию можем считать каждый шарик уединенным), для заряда системы получаем

$$Q = \sum_{i=1}^{N+1} Q_i = \sum_{i=1}^{N+1}\left(4\pi\varepsilon_0 r\varphi_i\right) = 4\pi\varepsilon_0 r\sum_{i=1}^{N+1}\varphi_i = -4\pi\varepsilon_0 rU_0\left(N+1\right). \qquad (2)$$

После замыкания цепи распределение потенциалов изменится в соответствии с законом Ома. Действительно, ток в цепи

$$I = \frac{U_0}{NR} \qquad (3)$$

Соответственно, падение напряжения на каждом резисторе

$$U_1 = IR = \frac{U_0}{N} \qquad (4)$$

Из (4) следует, что потенциалы шариков будут возрастать на U_1 при переходе через каждый резистор

$$-U_0; -U_0 + U_0 / N; -U_0 + 2U_0 / N; \ldots . -U_0 / N; 0$$

Соответственно, новый заряд

$$Q^* = \sum_{i=1}^{N+1}\left(4\pi\varepsilon_0 r\varphi_i\right) = -4\pi\varepsilon_0 r\sum_{i=1}^{N+1}\frac{U_0}{N}\left(i-1\right) = -4\pi\varepsilon_0 r\frac{U_0}{N}\left(1+2+\ldots+N\right) = -2\pi\varepsilon_0 rU_0(N+1)$$

Таким образом, искомый заряд изменился на

$$\Delta Q = Q^* - Q = 2\pi\varepsilon_0 rU_0(N+1) \qquad (5)$$

Как следует из (5) суммарный заряд всех шариков возрастет (но уменьшится по абсолютной величине), что легко объяснить, если принять во внимание что потенциалы всех шариков за исключением крайнего слева при замыкании ключа возрастут.

10-2. Определим какое количество теплоты потребуется, чтобы ν_2 молей твердой углекислоты испарилось в данных условиях. Согласно первому закону термодинамики

$$Q = \nu_2 \mu r + Mgh,$$

где μ - молярная масса углекислоты, Mgh - работа газа по поднятию поршня. Используя уравнение состояния идеального газа, запишем

$$PV_0 = \nu_1 RT_c$$

$$PV_1 = (\nu_1 + \nu_2)RT_c$$

отсюда следует

$$Mgh = P(V_1 - V_2) = \nu_2 RT_c,$$

тогда искомое количество теплоты

$$Q = \nu_2(\mu r + RT_c).$$

Так как не известно, испарится ли весь «сухой лед», подсчитаем какое количество теплоты потребуется для полного его испарения, полагая $\nu_2 = 0.10 моль$ь (что соответствует 4.4 грамм), получим $Q \approx 234 Дж$, что меньше, чем подведенное количество теплоты, поэтому весь лед испарится, а оставшееся количество теплоты пойдет на нагревание газа. Запишем еще раз уравнение первого начала термодинамики

$$Q = mr + Mgh + \frac{5}{2}R(\nu_2 + \nu_1)(T - T_c),$$

где T - конечная температура газа.

Совершенною работу найдем с помощью уравнения состояния

$$Mgh = P\Delta V = (\nu_1 + \nu_2)RT - \nu_1 RT_c,$$

Из этих уравнений легко находим

$$T = \frac{Q - mr + \nu_1 RT_c + \frac{5}{2}(\nu_1 + \nu_2)RT_c}{\frac{7}{2}(\nu_1 + \nu_2)R} \approx 200K.$$

10-3.См. решение №4 для 9 класса.

10-4-1. В инерциальной системе отсчета (ИСО) относительно Земли жук движется с угловой скоростью

$$\omega = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{T}.$$

Где знаки соответствуют движению жука по или против направления вращения пластинки.

Следовательно, его центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 R = \left(2\pi n \pm \frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

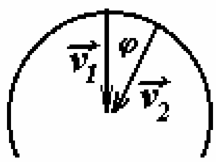
Согласно основному закону динамики

$$ma = F_{тр} = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{a}{g} = \left(2\pi n \pm \frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{g}.$$

Расчеты приводят к следующим значениям: 0.34 для движения в сторону вращения и 0.16 для противоположного направления движения.

10-4-2. Ищем ускорение жука в ИСО. Центростремительное ускорение

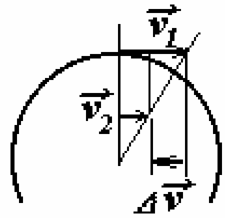
$$a_1 = \omega^2 R_1 = (2\pi n)^2 R_1.$$



Вследствие вращения изменяется направление вектора скорости, т.е.

$$\Delta v = v\Delta\varphi = v\omega\Delta t, \quad a_2 = \omega v.$$

С изменением расстояния изменяется и тангенциальная составляющая скорости, что тоже приводит к появлению соответствующей составляющей ускорения



$$\Delta v = \omega(R + \Delta R) - \omega R = \omega\Delta R, \quad a_3 = \omega\frac{\Delta R}{\Delta t} = \omega v$$

направленной так же как и a_2.

Векторное сложение ускорений позволяет определить полное ускорение

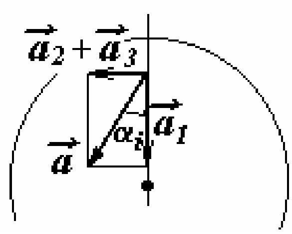
$$a = \sqrt{a_1^2 + (a_2 + a_3)^2} = \sqrt{(2\pi nR)^2 + 4\omega^2 v^2} = 1{,}86\, м / с^{-2}.$$

Соответственно искомая сила трения равна

$$F_{тр} = ma = 9.3 \cdot 10^{-4}\, H.$$

Заметим, что решение данной задачи сводится к вычислению силы Кориолиса.

10-4-3. Для вычисления работы вспомним формулу



$$A = \vec{F} \cdot \vec{S},$$

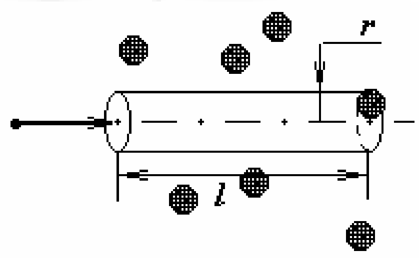
где $\vec{F}$ - мускульная сила жука. Теперь нужно учесть то, что сила жука при движении постоянно меняется по величине и по направлению, поэтому предлагается следующий способ вычисления

$$A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \sum_i F_i \cdot \Delta r_i \cdot \cos\alpha_i = \sum_i \Delta r_i \left(F_i \cos\alpha_i\right) = \left\{F_i \cos\alpha_i = m a_{1i}\right\} =$$

$$= \sum_i m\omega^2 r_i \Delta r_i = m\omega^2 \sum_i r_i \Delta r_i = m\omega^2 \frac{r^2}{2} = 1{,}19 \cdot 10^{-4}\ Дж\,.$$

11-1. В отсутствие диода в контуре возникнут колебания тока. Напряжение на конденсаторе будет изменяться по гармоническому закону. Равновесное значение напряжения $U_c = U_0$. Амплитуда колебаний (начальное отклонение) также U_0. Диод «обрежет» разрядку. Следовательно, напряжение на конденсаторе $2U_0$.

11-2. Рассмотрим траекторию одного фотона. Если на расстоянии r от нее находится центр частицы, то фотон поглощается. Среднюю длину пробега l можно оценить из условия, что в цилиндре объемом $\pi r^2 l$ находится одна частица

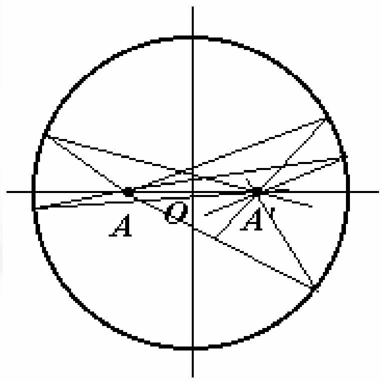


$$n\pi r^2 l = 1$$

Отсюда

$$l = \frac{1}{\pi r^2 n} = \frac{1}{3{,}14\left(1{,}2 \cdot 10^{-6}\right)^2 4 \cdot 10^9} \approx 55\,м\,.$$

11-3. Фонтанчик брызнет на расстоянии a от центра с другой стороны как результат интерференции отраженных волн. Для лучей близких к линии AO длины путей до симметричной точки A' одинаковы с точностью до малых величин второго порядка малости. Поэтому эти участки волн приходят в эту точки почти одновременно, следовательно, интерферируя, образуют «всплеск» волны.



Скорость волн находим из условия

$$\frac{2R}{v} = \tau\,, \quad v = \frac{2R}{\tau}.$$

11-4-1. Поскольку масса платформы меняется, то второй закон Ньютона запишем в форме (изменение импульса системы равно импульсу внешней силы)

$$F_1 t = \left(m_0 + \mu_1 t\right)v\,, \qquad (1)$$

где m_0- начальная масса платформы, μ_1- скорость погрузки, v - скорость платформы в момент времени t. Заметим, что уравнение второго закона Ньютона в форме

$$F_1 = ma \tag{2}$$

в данном случае неприменимо, так как насыпающийся песок действует на платформу с некоторой тормозящей силой, которую здесь необходимо учесть.

В уравнении (1) две неизвестные величины m_0 и μ_1. Поэтому, в принципе, можно снять из графика зависимости $v(t)$ данные для двух различных моментов времени и решить полученную систему уравнений. Однако, определить по графику нужные значения можно только с определенной погрешностью. Для уменьшения последней предпочтительнее использовать больше исходной информации. Из уравнения (1) следует, что масса платформы как функция времени может быть представлена в виде

$$m = m_0 + \mu_1 t = \frac{F_1 t}{v}. \tag{3}$$

Используя приведенный в условии график, можно построить зависимость величины $F_1 t / v$ от времени, которая должна быть линейной, а затем обрабатывая этот график легко найти требуемые параметры. Такая процедура приводит к результату $m_0 \approx 1T, \mu_1 \approx 0{,}1T / c$.

11-4-2. Движение платформы в случае разгрузки подчиняется уравнению

$$F_2 = (m_0 - \mu_2 t)a. \tag{4}$$

Высыпающийся песок имеет ту же горизонтальную составляющую скорости, что и платформа, поэтому непосредственно на платформу не действует. Поясним, что закон Ньютона в форме (1) в этой ситуации неприменим, так как часть импульса уносит высыпающийся песок. Из уравнения (4) следует

$$m = (m_0 - \mu_2 t) = \frac{F_2}{a}. \tag{5}$$

Ускорение платформы a можно определить по графику зависимости $v(t)$, как коэффициент наклона касательной. Однако, в данном случае график изогнут слабо, поэтому строить касательные затруднительно, да и точность таких построений не высока - можно ограничиться нахождением ускорений в двух произвольных точках. Например, в начале движения ускорение приблизительно равно 0,2 м/с^2, а в конце достигает величины 0,4 м/с^2. Учитывая эти данные находим $m_0 \approx 25T, \mu_1 \approx 0{,}12T / c$.

11-4-3. Вычислим силу F^*, с которой насыпающийся песок действует на движущуюся платформу. За небольшой промежуток времени Δt порция песка массой $\mu_1 \Delta t$ увеличивает скорость от нуля до v. Следовательно, на этот песок действует сила, импульс которой $F\Delta t$ равен изменению импульса песка

$$F^* = \mu_1 v$$

Отсюда находим

$$F^* = \mu_1 v \qquad (6)$$

С такой же силой насыпающийся песок действует на платформу. Если эта сила равна внешней приложенной силе F_1, то платформа будет двигаться с постоянной скоростью v_0, то есть

$$\mu_1 v_0 = F_1 \qquad (7)$$

или $v_c = \dfrac{F_1}{\mu_1} = 20 м/с$.