



## Гродно 1999г. (Решения задач)

### 9 класс.

1. Так как плита наклонена под углом  $45^\circ$  к горизонту, то после удара скорость шарика  $\vec{V}_1$  будет направлена горизонтально. Поэтому, движение шарика после удара описывается уравнениями

$$\begin{cases} S = V_1 t_2 \\ h = \frac{gt_2^2}{2} \end{cases}, \quad (1)$$

где  $t_2$  - время движения от удара о плиту до падения на землю. Из системы уравнений (1) находим

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad V_1 = S \sqrt{\frac{g}{2h}}. \quad (2)$$

Зная скорость шарика перед ударом о плиту, найдем время его движения от начальной точки  $A$  до удара

$$t_1 = \frac{V_1}{g} = \frac{S}{\sqrt{2gh}}. \quad (3)$$

Полное время движения шарика рассчитаем по формуле

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{\sqrt{2gh}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1,35c. \quad (4)$$

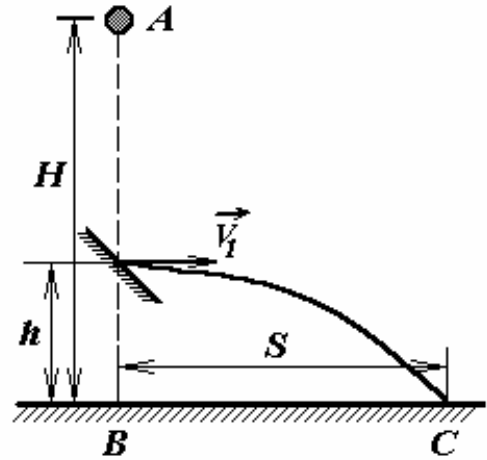
Используя выражение (3), найдем высоту  $H$  точки  $A$  над уровнем земли

$$H = h + \frac{gt_1^2}{2} = h + \frac{S^2}{4h} = 5,0\text{ м}. \quad (5)$$

Найдем высоту  $h_0$ , на которой необходимо расположить плиту, чтобы дальность полета  $S$  была максимальна. Пройдя в свободном падении путь  $(H - h_0)$ , шарик наберет скорость  $V_1 = \sqrt{2g(H - h_0)}$ . Как следует из формул (2), после отражения он пролетит до падения на землю расстояние

$$S = V_1 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 2\sqrt{h_0(H - h_0)}. \quad (6)$$

Подкоренное выражение представляет собой квадратную функцию от  $h_0$ , которая в данном случае достигает максимума при



$$\boxed{h_0 = \frac{H}{2} = 2,5\text{ м}}, \text{ при этом } \boxed{S_{max} = H = 5,0\text{ м}}.$$

2. При вращении кинетическая энергия шара вследствие работы сил трения перейдет в тепловую. Работа сил трения может быть рассчитана по формуле

$$A = FV_{cp}t, \quad (1)$$

где  $F$  - сумма модулей сил трения, действующих на отдельные участки линии соприкосновения шара и плиты;  $V_{cp} = \frac{\omega_0 r}{2}$  -

средняя скорость движения точек соприкосновения,  $\omega_0$  - начальная угловая скорость вращения (так как все силы действующие на шарик постоянны, то его движение будет равнозамедленным, следовательно средняя скорость до остановки равна половине начальной);  $t$  - время движения. Величину  $F$  найдем по закону Кулона-Амонтона

$$F = \mu N, \quad (2)$$

где  $N$  - суммарная сила нормальной реакции плиты, действующей на шарик. Так как центр масс шарика покоится, сила тяжести уравнивается вертикальной составляющей сил реакции

$$mg = N \cos \alpha = N \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}, \quad (3)$$

откуда следует

$$N = mg \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (4)$$

Подставив выражения (2)-(4) в формулу (1), получим

$$A = \mu mg \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \frac{\omega_0 r}{2} t. \quad (5)$$

Начальные скорости вращения шарика в обоих случаях равны, поэтому равны и его кинетические энергии, следовательно, равны и работы сил трения. Таким образом, из уравнения (5) следует соотношение

$$\frac{r_1 t_1}{\sqrt{R^2 - r_1^2}} = \frac{r_2 t_2}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}, \quad (6)$$

из которого находим окончательный ответ задачи



$$t_2 = \frac{r_1 \sqrt{R^2 - r_2^2}}{r_2 \sqrt{R^2 - r_1^2}} t_1 \approx 2lc.$$

3. Так как самодельный термометр работает на принципе теплового расширения жидкости, то его шкала в заданном диапазоне температур линейна. Следовательно, истинная температура, которую мы обозначим  $\tau$ , связана с показанием термометра  $t$  линейным соотношением

$$\tau = a + bt, \quad (1)$$

где  $a, b$  - постоянные величины, которые легко найти из двух известных температур плавления льда и кипения воды с соответствующих показаний термометра :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= a + bt_0 \\ \tau_1 &= a + bt_1 \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $\tau_0 = 0^\circ C$  - температура плавления льда,  $\tau_1 = 100^\circ C$  - температура кипения воды. Из системы уравнений (2) находим параметры формулы (1):

$$b = \frac{\tau_1 - \tau_0}{t_1 - t_0} \approx 1,11 \quad ; \quad a = \frac{\tau_0 t_1 - \tau_1 t_0}{t_1 - t_0} \approx -5,56.$$

Следовательно истинная температура воздуха в комнате

$$\tau = a + bt \approx 22^\circ C.$$

4. Наиболее простой способ решения данной задачи - воспользоваться аналогией между законом движения жидкости по трубе и законами постоянного тока. Действительно, если заменить среднюю скорость движения жидкости (и пропорциональный ей расход) на силу тока, разность давлений на электрическое напряжение, а величину  $\frac{l}{\lambda S}$  на электрическое сопротивление, то из уравнения для расхода жидкости получим закон Ома для участка цепи  $I = \frac{U}{R}$ . Сопротивление цепи, аналогичной прямой трубе определяется формулой

$$R_0 = \frac{l}{\lambda S}. \quad (1)$$

А сопротивление цепи, аналогичной системе труб с врезанным кольцом, рассчитаем с использованием законов последовательного и параллельного соединения проводников:

$$R_l = \frac{l - 2r + \frac{\pi r}{2}}{\lambda S}. \quad (2)$$

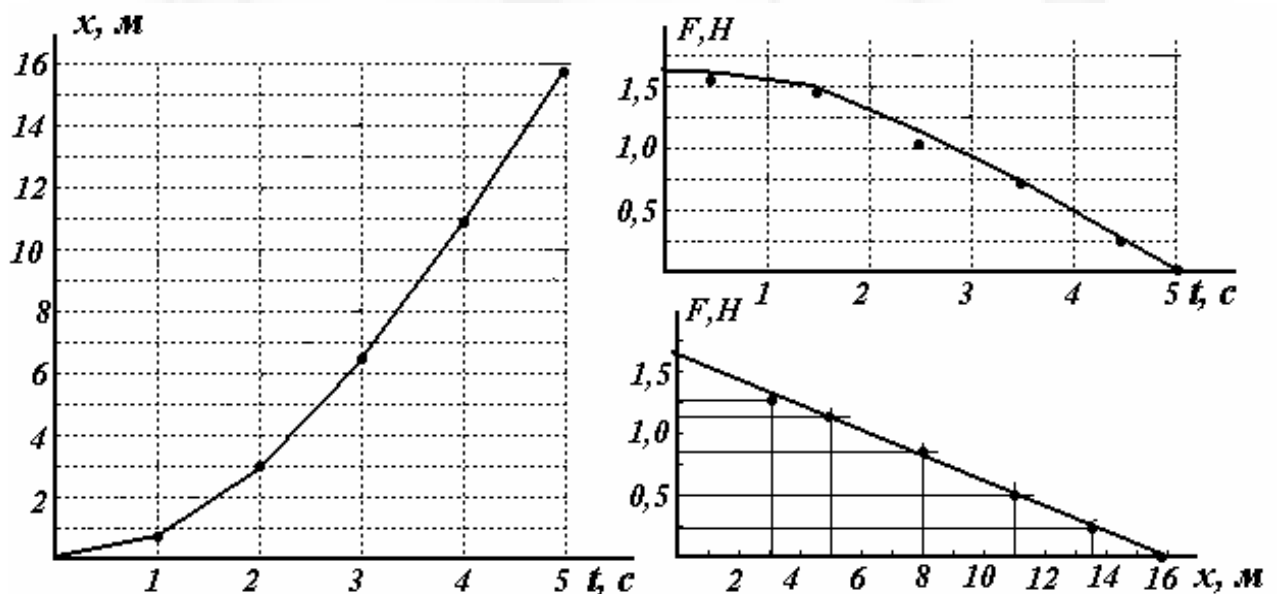
Так как при постоянном напряжении сила тока обратно пропорциональна сопротивлению участка, то и для расхода жидкости будет выполняться аналогичное соотношение

$$\frac{V_l}{V_0} = \frac{R_0}{R_l}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$V_l = V_0 \frac{l}{l - 2r + \frac{\pi r}{2}}$$

5. По графику зависимости скорости от времени можно приблизительно найти изменение координаты тела  $\Delta x$  за небольшой промежуток времени  $\Delta t$  по формуле  $\Delta x = \frac{v_l + v_0}{2} \Delta t$ , где  $v_l, v_0$  - скорости тела в конце и начале рассматриваемого промежутка времени. Среднее значение ускорения на этом же временном интервале можно приблизительно рассчитать по формуле  $\Delta x = \frac{v_l - v_0}{\Delta t}$ . Заметим, что координату тела легче рассчитывать в конце рассматриваемого интервала, а ускорение в его середине, кроме того, точность таких вычислений не слишком высока, поэтому лучше сначала построить графики зависимостей координаты и силы, действующей на тело ( $F = ma$ ) от времени, а затем уже требуемую зависимость силы от координаты. Результаты таких построений



показаны на рисунках.

Работу, совершенную силой, проще и точнее рассчитать, как изменение кинетической энергии тела

$$A = \frac{mv^2}{2} \approx 12,5 \text{ Дж}.$$

## 10 класс

1. Каждый атом в кристалле имеет три колебательных степени свободы. Следовательно, энергия колебательного движения одного атома равна  $3kT$ , а энергия одного моля атомов  $3kTN_A = 3RT$ , где  $N_A$  - число Авогадро. Таким образом, молярная теплоемкость кристалла  $C_\mu = 3R$ . Заметим, что данный факт был установлен экспериментально еще в первой половине XIX века и носит название закона Дюлонга-Пти. Данный закон не учитывает изменение потенциальной энергии взаимодействия атомов кристаллической решетки, которая мало изменяется при изменении температуры.

Проверим справедливость закона Дюлонга-Пти для имеющихся данных. Для этого рассчитаем молярные теплоемкости металлов по формуле  $C_\mu = C_m$ , и определим примерное значение газовой постоянной  $R' = C_\mu / 3$

### **Таблица.**

металл	$C_m$ , кДж / (кг · К)	$\mu$ , г / моль	$C_\mu$ , Дж / (моль · К)	$R'$ , Дж / (моль · К)
алюминий	0,88	27,0	23,76	7,92
железо	0,46	55,8	25,67	8,56
золото	0,13	197,0	25,61	8,54
магний	1,05	24,3	25,52	8,51
натрий	1,20	23,0	27,60	9,20
олово	0,20	118,6	23,72	7,91
марганец	0,50	54,9	27,45	9,15
медь	0,38	63,5	24,13	8,04

Как видно из проведенных расчетов, молярная теплоемкость действительно оказывается примерно одинаковой для всех металлов. Для более точной оценки газовой постоянной вычислим среднее значение величин  $R'$ , а также оценим погрешность найденного значения.

$$\bar{R} = \frac{\sum R'_i}{n} \approx 8,48 \text{ Дж / (моль · К)};$$

$$\Delta R \approx 2 \sqrt{\frac{\sum (R'_i - \bar{R})^2}{n(n-1)}} \approx 0,35.$$

Таким образом получим окончательную оценку

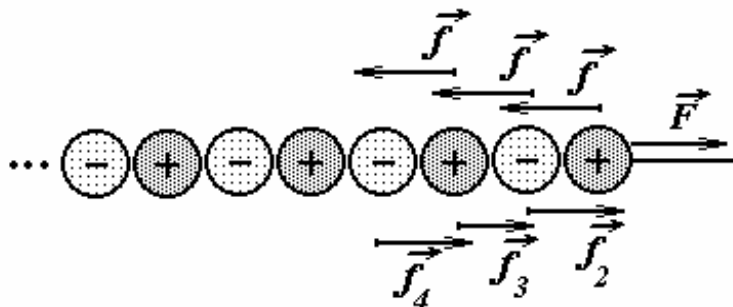
$$\bar{R} \approx (8,5 \pm 0,4) \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$$

2. С помощью закона Кулона рассчитаем силу  $\vec{f}$ , с которой притягивается каждый шарик к «полубесконечной» цепочке:

$$f = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\right) \approx 0,81f_0, \quad (1)$$

где  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = f_0$  - сила притяжения двух соседних шариков. Так как нас устраивает точность порядка 5%, то при вычислении суммы можно ограничиться 5-6 слагаемыми. Очевидно, что это и будет минимально необходимая сила для разрыва цепочки.  $F_{\min} \approx 8,1H$

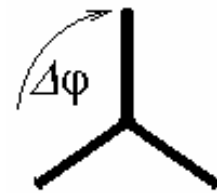
Если приложить такую силу к крайнему шарiku, то он начнет смещаться.



Рассмотрим теперь силы, действующие на второй шарик. Вправо на него действует сила  $f_2 = f_0$  со стороны первого шарика, а влево сила  $f = 0,81f_0$ , поэтому второй шарик также начнет смещаться вместе с первым. На третий шарик со стороны двух крайних действует сила  $f_3 = f_0 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 0,75f_0$ , которая меньше, чем сила притяжения к остальным шарикам, расположенным слева. Следовательно, это шарик не сдвинется, поэтому цепочка разорвется между вторым и третьим шариками.

3. Угловая скорость вращения вентилятора рассчитывается по формуле  $\omega = 2\pi n$ . Вентилятор будет казаться неподвижным с тремя лопастями, если за время между вспышками  $\tau$  лопасти повернутся на угол

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{естественно, мы}$$



предполагаем, что все лопасти вентилятора одинаковы). Таким образом, условие будет выполнено при  $2\pi n\tau = \frac{2\pi}{3}k$ , или при частотах вспышек  $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{3n}{k}$ . Так как минимальная частота стробоскопа равняется  $2\Gamma_{ц}$ , то максимальное значение  $k_{max} = 15$ .

Вентилятор будет казаться неподвижным с шестью лопастями, если за время между вспышками лопасти повернутся на угол

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, частоты вспышек стробоскопа в этом случае можно найти из уравнения  $2\pi n\tau = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$ , или  $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{3n}{k + \frac{1}{2}}$ .



Максимальное значения  $k$  в этом случае равно 14.

Наконец, вентилятор будет казаться вращающимся в противоположную сторону с частотой  $n_1$ , если за время между вспышками лопасти повернутся на угол

$$\Delta\varphi = -2\pi n_1\tau + \frac{2\pi}{3}k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Соответствующее уравнения для определения частот стробоскопа имеет вид  $2\pi n\tau = -2\pi n_1\tau + \frac{2\pi}{3}k$ . Из которого

$$\text{следует } \nu = \frac{1}{\tau} = \frac{3(n + n_1)}{k}; \quad k = 1, 2, 3, \dots, 15.$$



4. В ходе перемещения поршня на него действуют силы давления воздуха

$$F_1 = P_0 a(a - h) \quad (1)$$

и воды

$$F_2 = \left(\rho g \frac{h}{2} + P_0\right) ah \quad (2),$$

где  $\rho$  - плотность воды,  $h$  - изменяющаяся высота уровня воды в сосуде,  $\rho g \frac{h}{2}$  - среднее давление воды на поршень. Так как поршень

плотно пригнан, то между ним и правой стенкой сосуда находится вакуум.

Чтобы совершенная работа была минимальна к поршню необходимо прикладывать силу, лишь незначительно превышающую силу давления воды и воздуха:

$$F = F_1 + F_2 = P_0 a^2 + \rho g a \frac{h^2}{2}. \quad (3)$$

Как следует из формулы (3) прикладываемая сила должна изменяться в ходе перемещения поршня, поэтому совершенную ею работу подсчитать сложно (необходимо использовать операцию интегрирования. Однако, первое слагаемое выражении (3) постоянно (поэтому работу этой силы  $A_1$  подсчитать не составляет труда), а работа оставшейся составляющей силы равна изменению потенциальной энергии воды  $A_2 = \Delta U$  (найти которое тоже не сложно).

Итак,

$$A_1 = P_0 a^2 x, \quad (4)$$

где  $x$  - смещение поршня, которое найдем из условия постоянства объема воды

$$l a h_0 = (l - x) a^2 \Rightarrow x = l \left(1 - \frac{h_0}{a}\right). \quad (5)$$

Следовательно,  $A_1 = P_0 a^2 l \left(1 - \frac{h_0}{a}\right)$ .

Вычислим изменение потенциальной энергии воды по формуле

$$A_2 = \Delta U = \rho g (l - x) a \frac{a}{2} - \rho g l h_0 \frac{h_0}{2} = \frac{\rho g a l h_0}{2}. \quad (6)$$

Таким образом полная работа вычисляется по формуле

$$A = \frac{\rho g a l h_0}{2} + P_0 a^2 l \left(1 - \frac{h_0}{a}\right)$$

Заметим, что для не очень высоких сосудов ( $\rho g a \ll P_0$ ) второе слагаемое значительно превышает первое, то есть основная работа совершается по преодолению силы атмосферного давления.



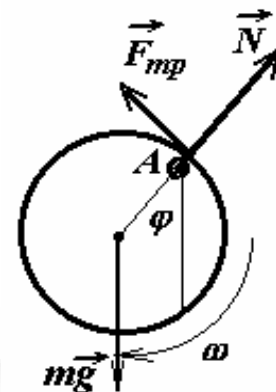
5. Из графика зависимости угла поворота кольца от времени видим, что центр кольца совершает затухающие колебания.

Найдем положения равновесия кольца, в котором сумма сил, действующих на кольцо равна нулю. Это условие имеет вид

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \varphi \\ F_{mp} &= mg \sin \varphi \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывая, что  $F_{mp} = \mu N$ , находим положение равновесия кольца

$\varphi_0 = \arctg \mu$ , или  $\mu = tg \varphi_0$ . Из графика закона движения находим  $\varphi_0 \approx 0,33$ ,  $\mu \approx 0,34$ .



Рассмотрим теперь движение кольца на вертикальном стержне. Для того чтобы кольцо вращалось на постоянной высоте, необходимо, чтобы оно вращалось на стержне без проскальзывания - только в этом случае сила трения будет направлена вертикально вверх и сможет уравновесить силу тяжести.

Центр кольца в такой ситуации движется по окружности радиуса  $(R - r)$ , поэтому сила нормальной реакции

$$N = m \frac{v_0^2}{R - r}, \quad (2)$$

где  $v_0$  - скорость центра кольца. Сила трения (которая в данном случае является силой трения покоя), может принимать значения

$$F_{mp} < \mu N. \quad (3)$$

Если кольцо остается на неизменной высоте, то выполняется условие

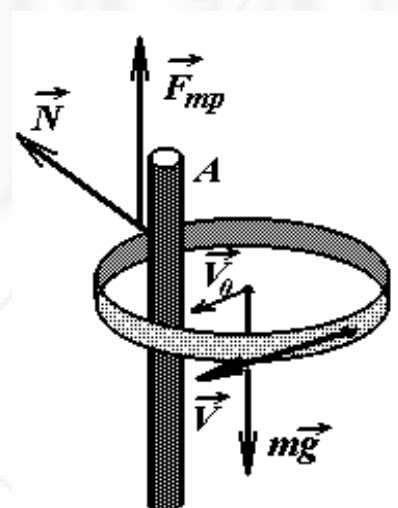
$$F_{mp} = mg. \quad (4)$$

Из выражений (2)-(3) находим

$v_0 > \sqrt{\frac{g(R - r)}{\mu}}$ , а скорость крайней (по отношению к стержню)

точки кольца, может быть найдена из простых геометрических построений, учитывающих, что кольцо вращается относительно оси стержня:

$$V = v_0 \frac{2R - r}{R - r}. \quad (5)$$



Таким образом, окончательный ответ данной задачи определяется по формуле

$$V > \frac{2R-r}{R-r} \sqrt{\frac{g(R-r)}{\mu}} \approx 3,5 \text{ м / с}$$

## 11 класс.

1. Мощность тока в цепи двигателя  $IU$  ( $I$ -сила тока в цепи двигателя,  $U$  - напряжение контактной цепи) равна сумме механической мощности  $\beta v^2$  ( $v$ - скорость движения трамвая,  $\beta v$ - сила сопротивления), затрачиваемой на преодоление сил сопротивления, и мощности джоулевых тепловых потерь  $I^2 R$  ( $R$ - полное электрическое сопротивление цепи двигателя):

$$IU = \beta v^2 + I^2 R. \quad (1)$$

Заметим, что слагаемое  $\beta v^2$  равно произведению силы тока на ЭДС индукции, возникающей в якоре электродвигателя при его вращении.

Выразим полезную мощность  $P = \beta v^2$  из уравнения (1):

$$\beta v^2 = IU - I^2 R. \quad (2)$$

Из вида зависимости  $P(I)$  следует, что полезная мощность достигает максимального значения при  $I = \frac{U}{2R}$ , причем  $P_{max} = \frac{U^2}{4R}$ .

При движении трамвая со скоростью  $v_0$ , меньшей максимальной скорости, выполняется соотношение

$$\beta v_0^2 = I_0 U - I_0^2 R, \quad (3)$$

а при движении с максимальной скоростью справедливо

$$\beta v_{max}^2 = \frac{U^2}{4R}. \quad (4)$$

Решив уравнения (3)-(4), определим сопротивление цепи

$$R = \frac{U}{2I_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_{max}^2}} \right). \quad (5)$$

Два решения соответствуют тому, что полезная мощность квадратично зависит от силы тока (см. уравнение (2)), следовательно, ее одно и то же значение может быть достигнуто при двух значениях сопротивления цепи..

При остановке трамвая сила тока в цепи двигателя станет равной

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2I_0}{l \pm \sqrt{l^2 - \frac{v_0^2}{v_{max}^2}}}$$

Два рассчитанных по этой формуле значения силы тока равны  $600\text{А}$  и  $32\text{А}$ . Для выбора одного из значений рассчитаем по формуле (4) максимальную мощность, достигаемую при данных значениях сопротивления и напряжения в цепи. Получаем  $99\text{ кВт}$  при напряжении  $660\text{ В}$  и токе  $600\text{ А}$  и  $5,3\text{ кВт}$  при  $660\text{ В}$  и токе  $32\text{ А}$ . Очевидно, что реальным является первое значение мощности трамвая, а следовательно, и первое значение силы тока, т.е.  $600\text{ А}$ .

Ответ :  $I = 600\text{ А}$

2. Рассмотрим внешние силы, действующие на пластинку номер  $k$ , расположенную на расстоянии  $x_k$  от оси вращения. Помимо силы тяжести  $mg$ , на нее действует со стороны магнитного поля сила Ампера  $F = IBl$ . Условие равновесия обоймы сводится к равенству суммарных моментов сил тяжести и сил Ампера

$$\sum_k mgx_k \sin\alpha = \sum_k I_k B l x_k \cos\alpha. \quad (1)$$

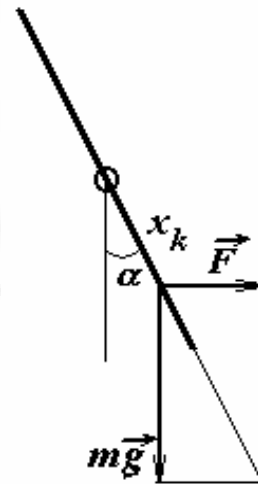
Так как пластинки одинаковы и соединены параллельно, а внутреннее сопротивление источника значительно превышает сопротивление пластинок, то сила тока через каждую пластинку может быть найдена по формуле

$$I_k = \frac{\varepsilon}{nr}, \quad (2)$$

где  $n$  - общее число вложенных пластинок.

Из уравнений (1)-(2) находим положение равновесия

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon Bl}{nrmg}}. \quad (3)$$



3. Вычислим силу взаимодействия между двумя атомами как функцию расстояния между ними

$$f = -U' = \frac{12a}{r^{13}} - \frac{6b}{r^7}. \quad (1)$$

Положению равновесия соответствует нулевая сила взаимодействия (или, что равносильно, минимум потенциальной энергии). Поэтому

равновесное расстояние между атомами (период решетки) найдем из условия  $f = 0$ , из которого следует

$$r_0 = \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}. \quad (2)$$

На один атом в кубической кристаллической решетке приходится объем  $r_0^3$ , следовательно плотность кристалла рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{m}{r_0^3} = m \sqrt{\frac{b}{2a}}. \quad (3)$$

Вычислим энергию связи, приходящуюся на один атом. Так как атом взаимодействует с  $n = 6$  ближайшими соседями, то его потенциальная энергия

$$u = \frac{n}{2} U(r_0) = -\frac{3b^2}{4a}, \quad (4)$$

где учтено, что функция  $U(r)$  описывает энергию взаимодействия двух атомов. Для перехода из кристаллического в газообразное состояние нужно сообщить кристаллу энергию, необходимую для разрыва всех связей, иными словами, удельная теплота сублимации рассчитывается по формуле

$$\lambda = -\frac{u}{m} = \frac{3b^2}{4am}. \quad (5)$$

При отклонении атомов от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть атомы в исходное положение. При малых деформациях эта сила пропорциональна деформации. Для ее вычисления преобразуем формулу (1) при условии  $r = r_0 + x$ , где  $x$  - малое отклонение от положения равновесия. В ходе преобразований необходимо использовать приближенную формулу, приведенную в условии задачи с учетом членов первого порядка малости

$$f = \frac{12a}{(r_0 + x)^{13}} - \frac{6b}{(r_0 + x)^7} = \frac{12a}{r_0^{13}} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-13} - \frac{6b}{r_0^7} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-7} \approx -\frac{36b}{r_0^7} \cdot \frac{x}{r_0}. \quad (6)$$

В поперечном сечении кристалла на один атом приходится площадь  $r_0^2$ , следовательно, механическое напряжение в кристалле определяется формулой

$$\sigma = \frac{f}{r_0^2} = \frac{36b}{r_0^9} \cdot \frac{x}{r_0} = \frac{18}{\sqrt{2}} b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{r_0}. \quad (7)$$

Сравнивая с законом Гука  $\sigma = E\varepsilon$  (где  $\varepsilon = \frac{x}{r_0}$  - относительная деформация), получим выражение для модуля Юнга

$$E = \frac{18}{\sqrt{2}} b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 12,8b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (8)$$

Сила взаимодействия между атомами принимает максимальное значение при некотором расстоянии  $r_1$ . Если расстояние между атомами превысит  $r_1$ , то сила взаимодействия (притяжения) начнет уменьшаться и, следовательно, при постоянной внешней силе кристалл разрушится. Найдем значение  $r_1$  из условия  $f' = 0$ :

$$f' = -\frac{12 \cdot 13a}{r^{14}} + \frac{6 \cdot 7b}{r^8} = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) находим расстояние  $r_1$ , при котором сила притяжения максимальна

$$r_1 = \left( \frac{26a}{7b} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (10)$$

Таким образом, максимальное относительное удлинение кристалла до разрушения определяется соотношением

$$\varepsilon_{\max} = \frac{r_1 - r_0}{r_0} = \left( \frac{13}{7} \right)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0,11. \quad (11)$$

При таком удлинении сила взаимодействия и соответствующее механическое напряжение (которое и является предельной прочностью) определяются формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{U'(r_1)}{r_0^2} = \frac{18}{\sqrt{2}} \left( \frac{13}{7} \right)^{\frac{7}{6}} b \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 26,2b \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

Термическое расширение твердых тел связано с увеличением кинетической энергии колеблющихся атомов. С ростом температуры увеличивается диапазон изменения расстояний между атомами. Существенным фактором является несимметричность потенциальной кривой - максимальное отклонение от положения равновесия в большую сторону превышает отклонение в меньшую сторону. Обозначим максимальное и минимальное расстояния между атомами в ходе колебаний  $r_1$  и  $r_2$ , соответственно. Тогда среднее расстояние между атомами может быть оценено как среднее арифметическое между этими величинами. Расстояния  $r_1$  и  $r_2$  являются корнями уравнения

$$U(r) = U(r_0) + kT, \quad (13)$$

где  $kT$  - средняя энергия одномерного колебательного движения атомов в кристаллической решетке ( $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - абсолютная температура). Если обозначить  $x = r^{-6}$  и принять во внимание формулу (20), то уравнение (13) примет вид

$$ax^2 - bx + \frac{b^2}{4a} - kT = 0, \quad (14)$$

корни которого находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{b}{2a} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{4akT}{b^2}} \right). \quad (15)$$

Теперь можно найти значения  $r_1$  и  $r_2$ :

$$r_{1,2} = r_0 (1 \pm \delta)^{\frac{1}{6}} \approx r_0 \left( 1 \mp \frac{\delta}{6} + \frac{7}{72} \delta^2 \right), \quad (16)$$

где обозначено  $\delta = \sqrt{\frac{4akT}{b^2}}$  и использовано разложение степенной функции с учетом членом второго порядка малости. Среднее расстояние между атомами найдем, усредняя  $r_1$  и  $r_2$ :

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2} = r_0 \left( 1 + \frac{7}{72} \delta^2 \right) = r_0 \left( 1 + \frac{7akT}{18b^2} \right). \quad (17)$$

Сравнивая выражение (17) с формулой термического расширения  $l = l_0(1 + \alpha \Delta T)$ , находим линейный коэффициент термического расширения

$$\alpha = \frac{7ak}{18b^2}. \quad (18)$$

4. Степень почернения фотопластинки пропорциональна экспозиции - произведению интенсивности света на время засветки. Если интенсивность света изменяется в течении времени фотографирования, то для вычисления степени почернения необходимо просуммировать экспозиции по тем промежуткам в течении которых интенсивность света постоянна. В разных точках трека световые импульсы перекрываются по разному (либо не перекрываются вовсе). В момент перекрытия импульсов интенсивность возбуждения возрастает в 2 раза, следовательно, интенсивность люминесценции возрастает в 4 раза. Этим объясняется наличие области большего почернения на фотографии трека. Заметим, что в случае обычной люминесценции или рассеяние «след» импульса имел бы постоянную засветку.

Построим графики законов движения передних и задних фронтов первого, распространяющегося вправо, и второго, распространяющегося влево, импульсов:

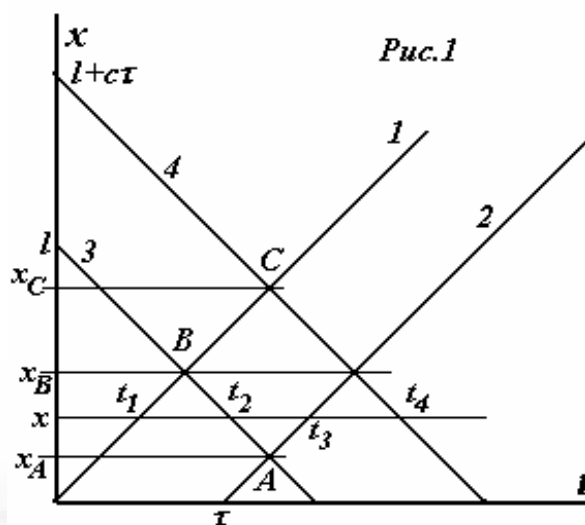
1) передний фронт первого импульса  $x_1 = ct$  ;

2) задний фронт первого импульса  $x_2 = c(t - \tau)$ ;

3) передний фронт второго импульса  $x_3 = l - ct$ ;

4) задний фронт второго импульса  $x_4 = l - c(t - \tau)$ .

В этих уравнениях  $c$  - скорость света в растворе;  $l$  - длина кюветы;  $\tau$  - длительность импульса. Как видно из графиков импульсы перекрываются в области от точки  $A$  до точки  $C$ , а в точке  $B$  - перекрытие импульсов полное.



Координаты этих точек легко найти из уравнений движения:

$$x_A = \frac{l - c\tau}{2}; x_B = \frac{l}{2}; x_C = \frac{l + c\tau}{2}.$$

При  $x < x_A$  возбуждающие импульсы не перекрываются, поэтому суммарная засветка пленки в этих точках равна  $E_1 = 2bI_0^2\tau$ , где  $b$  - некоторый постоянный коэффициент.

При  $x_A < x < x_B$  степень засветки следует рассчитывать по формуле

$$E_2 = bI_0^2(t_2 - t_1) + b(2I_0)^2(t_3 - t_2) + bI_0^2(t_4 - t_3),$$

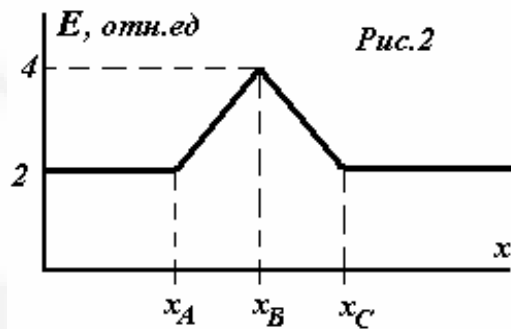
где смысл используемых моментов времени ясен из рисунка. Эти моменты времени также легко могут быть найдены из законов движения. Аккуратный подсчет засветки в этой области приводит к результату

$$E_2 = bI_0^2 \left( 4\tau - 2 \frac{l - 2x}{c} \right).$$

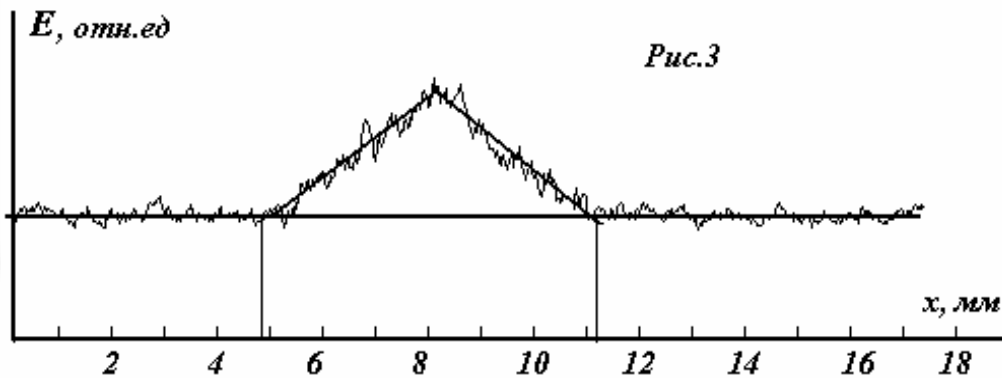
При  $x > x_B$  функция отображается симметрично - для чего следует заметить величину  $l - cx$  на  $l + cx$ . Таким образом полностью искомая зависимость степени почернения от координаты имеет вид:

$$E = \begin{cases} 2bI_0^2, & \text{при } x < \frac{l - c\tau}{2} \\ bI_0^2 \left( 4\tau - 2\frac{l - 2x}{c} \right), & \text{при } \frac{l - c\tau}{2} < x < \frac{l}{2} \\ bI_0^2 \left( 4\tau - 2\frac{l + 2x}{c} \right), & \text{при } \frac{l}{2} < x < \frac{l + c\tau}{2} \\ 2bI_0^2, & \text{при } x > \frac{l + c\tau}{2} \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис.2. Легко заметить, что разность  $x_C - x_A = c\tau$ , т.е. ширина максимума равна длине импульса в растворе, откуда без труда вычисляется его длительность.



В реальном эксперименте такого типа неизбежны флуктуации степени почернения. Поэтому необходимо на приведенном графике «усреднить» функциональную зависимость, что проделано на рис.3.



Из этого графика находим, что длина импульса примерно равна  $\delta l \approx 6 \text{ мм}$ , следовательно, его длительность

$$\tau = \frac{\delta l}{c} = \frac{n\delta l}{c_0} \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ с} = 30 \text{ пс},$$

где  $c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  - скорость света в вакууме.



