

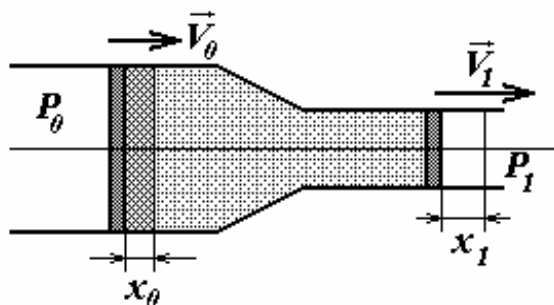


**Белорусская  
республиканская физическая олимпиада  
Барановичи, 2001 год**

**Решения задач.**

**9 класс.**

9.1. Пусть один поршень, двигаясь с постоянной скоростью  $V_0$ , сместился на малое расстояние  $x_0$ , тогда второй, двигаясь со скоростью  $V_1$ , сместился на расстояние  $x_1$ , причем из условия несжимаемости жидкости следует



$$x_0 S_0 = x_1 S_1, \quad (1)$$

$$V_0 S_0 = V_1 S_1, \quad (2)$$

где  $S_0, S_1$  - площади поршней. Газ, находящийся слева, при этом совершит работу  $P_0 S_0 x_0$ , которая расходуется на работу второго поршня  $P_1 S_1 x_1$  и увеличение кинетической энергии жидкости. Действительно, часть жидкости объемом  $S_0 x_0$  увеличила скорость от  $V_0$  до  $V_1$ . Таким образом, уравнение баланса энергий имеет вид

$$P_0 S_0 x_0 = P_1 S_1 x_1 + \frac{1}{2} \rho S_0 x_0 (V_1^2 - V_0^2). \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1)-(3), получаем

$$V_0 = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_1)}{\left(\frac{r_0^4}{r_1^4} - 1\right)}}; \quad V_1 = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_1)}{\left(1 - \frac{r_1^4}{r_0^4}\right)}}; \quad (4)$$

при выводе учтено, что  $\frac{S_0^2}{S_1^2} = \frac{r_0^4}{r_1^4}$ .

Заметим, что соотношение (3) является фактически уравнением Бернулли.

9.2. Найдем тепловую мощность  $P$  плиты из уравнения теплового баланса

$$P\tau_0 = c\rho V_0(t_1 - t_0), \quad (1)$$

$$P = \frac{c\rho V_0(t_1 - t_0)}{\tau_0}, \quad (2)$$

где  $\rho$  и  $c$  - плотность и удельная теплоемкость воды, соответственно.

На этом этапе нагревания температура будет возрастать прямо пропорционально времени. Через время  $\tau$  после начала подливания, в кастрюле будет находиться

$$V = V_0 + v\tau \quad (3)$$

литров воды. Всего за время нагревания вода получит от нагревателя количество теплоты, которое определяется формулой

$$Q = P(\tau_0 + \tau). \quad (4)$$

Уравнение теплового баланса (за все время нагревания) будет иметь вид

$$P(\tau_0 + \tau) = c\rho(V_0 + v\tau)(t - t_0), \quad (5)$$

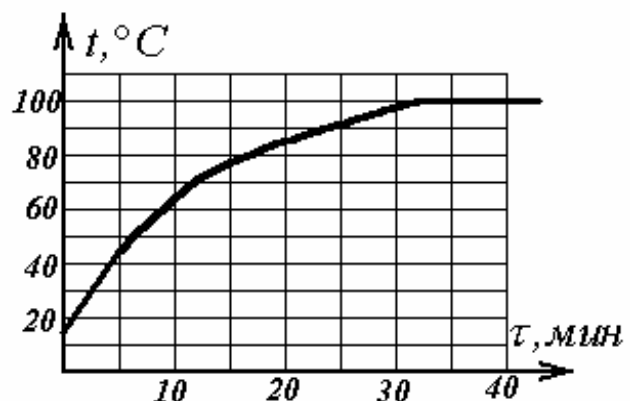
где  $t$  - температура воды в момент времени  $\tau$ . Подставляя выражение (2) для мощности нагревателя, получаем искомую функцию зависимости температуры от времени

$$t = t_0 + (t_1 - t_0) \frac{\left(1 + \frac{\tau}{\tau_0}\right)}{\left(1 + \frac{v\tau}{V_0}\right)}. \quad (6)$$

Эта функция является монотонной, стремящейся к предельному значению (при  $\tau \gg \tau_0$ )

$$t^* = t_0 + (t_1 - t_0) \frac{V_0}{v\tau_0}, \quad (7)$$

которое при заданных численных значениях параметров равно  $t^* = 135^\circ$ . Это значение превышает температуру кипения, поэтому увеличение температуры прекратится при достижении температуры кипения  $t_{\text{кип}} = 100^\circ$ . Можно найти момент времени, когда начнется кипение, для этого в уравнении (6) необходимо



положить  $t = t_{\text{кин}} = 100^\circ$  и найти соответствующее значение времени  $\tau \approx 28 \text{ мин}$ .

График полученной зависимости показан на рисунке. Значение скорости наливания  $v_1$ , при котором температура воды в кастрюле будет оставаться постоянной можно найти из формулы (6), в котором второе слагаемое должно не зависеть от времени  $\tau$ . Это возможно, только при  $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{v\tau}{V_0}$ . То есть, при  $v = \frac{V_0}{\tau_0} = 0,4 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$ .

Заметим, что это же значение можно получить из уравнения теплового баланса  $с\rho v_1(t_1 - t_0) = P$ .

9.3. Показания вольтметров различны, так как они обладают собственным сопротивлением, которое мы обозначим  $R_v$ , которое сравним с сопротивлением резисторов. Принимая во внимание законы последовательного и параллельного соединения, можем записать:

сила тока в каждой ветви цепи

$$I_k = \frac{U_0}{R_k + R_v}; \quad (1)$$

напряжение на  $k$  – том вольтметре

$$U_k = I_k R_v = \frac{U_0 R_v}{R_k + R_v}, \quad (2)$$

где  $U_0$  - напряжение на каждой ветви.

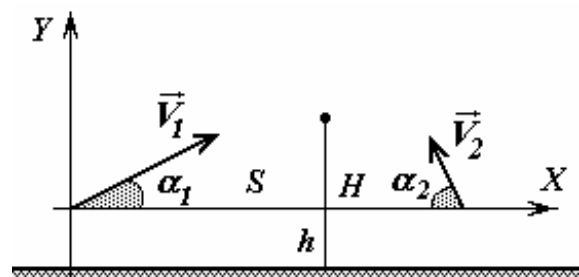
Зная сопротивления резисторов и значения напряжений на двух вольтметрах, из уравнений (2) можно найти сопротивление вольтметра

$$R_v = \frac{U_1 R_1 - U_2 R_2}{U_1 - U_2} \quad (3)$$

и напряжение на третьем вольтметре

$$U_3 = \frac{U_1 U_2 (R_1 - R_2)}{U_1 (R_3 - R_1) - U_2 (R_3 - R_2)} \quad (4)$$

9.4 Из кинематических законов равноускоренного движения можно записать следующие уравнения



$$\begin{cases} H - h = v_1 \tau \sin \alpha_1 - \frac{g \tau^2}{2} \\ H - h = v_1 \tau \sin \alpha_1 - \frac{g \tau^2}{2} ; \\ S = v_1 \tau \cos \alpha_1 + v_1 \tau \cos \alpha_1 \end{cases} \quad (1)$$

Из первых двух уравнений следует выразить значения  $v_1 \tau$  и  $v_2 \tau$  и подставить их в третье уравнение системы (1)

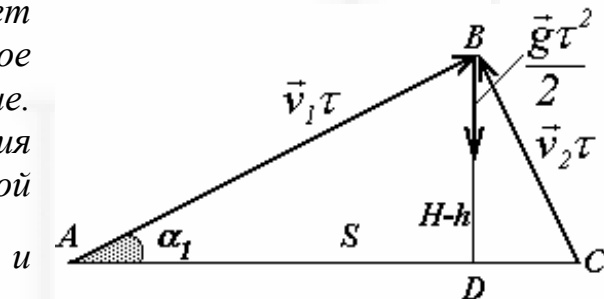
$$S = \left( H - h + \frac{g \tau^2}{2} \right) \cdot \left( \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} \right) \approx 18 \text{ м.} \quad (2)$$

Данная задача допускает также более простое «геометрическое» решение.

Представим закон движения каждого мяча в векторной форме  $\vec{r} = \vec{v} \tau - \frac{\vec{g} \tau^2}{2}$  и

изобразим его графически.

Можно заметить, что треугольники  $ABC$  и  $ABD$  прямоугольные (т.к.  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ ) поэтому



$$S = |AC| = \frac{|AB|}{\cos \alpha_1} = \frac{l}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{|BD|}{\sin \alpha_1} = \frac{H - h + \frac{g \tau^2}{2}}{\cos \alpha_1 \sin \alpha_1},$$

что приводит к тому же численному результату.

9.5 Запишем уравнения законов сохранения механической энергии и импульса, учитывая, что в момент наибольшего сближения x скорости тележек равны (обозначим это значение  $v$ )

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2 \frac{mv^2}{2} + U(x); \quad (1)$$

$$mv_0 = 2mv. \quad (2)$$

Из этих уравнений находим, что при минимальном сближении потенциальная энергия взаимодействия определяется выражением

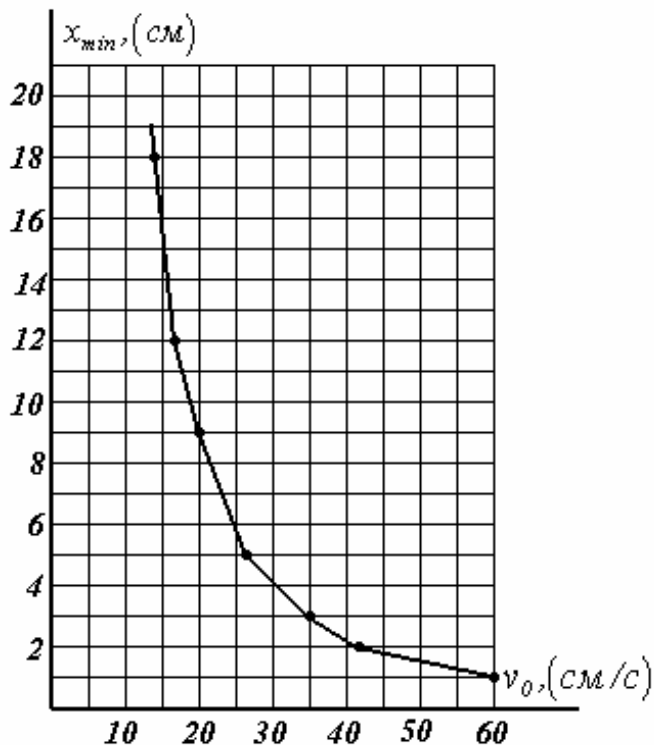
$$U(x) = \frac{mv_0^2}{4}; \quad (3)$$

Используя эту формулу и прилагаемый график зависимости  $U(x)$  можно рассчитать значения начальной скорости, при которой минимальное расстояние будет равно  $x_{min}$  с помощью выражения

$$v_0 = 2\sqrt{\frac{U(x_{min})}{m}}. \quad (4)$$

Результаты таких расчетов представлены в таблице и на графике

$x_{min},$ (см)	$U,$ (мДж)	$v_0,$ (см / с)
1	18	60
2	9	42
3	6	35
5	3,5	26
9	2	20
12	1,5	17
18	1	14



## 10 класс.

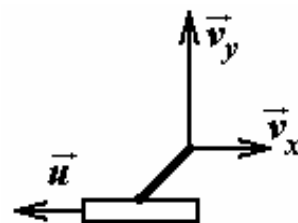
10.1 При неподвижной тележке дальность полета рассчитывается по известной формуле

$$S_0 = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g}, \quad (1)$$

где  $v_0$  - начальная скорость снаряда.

При выстреле с подвижной тележки будет сохраняться механическая энергия (причем она будет равна энергии снаряда при стрельбе с неподвижной тележки) и проекция импульса на горизонтальное направление. Кроме того, скорость снаряда относительно тележки (а не относительно земли) будет направлена под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту.

Разложим вектор скорости снаряда (относительно земли) на горизонтальную  $v_x$  и вертикальную  $v_y$  составляющие, скорость



тележки обозначим  $u$ . Тогда описанные условия примут вид

$$\frac{Mu^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (2)$$

$$Mu = mv_x, \quad (3)$$

$$v_y = u + v_x. \quad (4)$$

Время полета можно найти по формуле

$$t = \frac{2v_y}{g}, \quad (5)$$

тогда расстояние между снарядом и тележкой следует рассчитать по формуле

$$S = (v_x + u)t = \frac{2v_y^2}{g}, \quad (6)$$

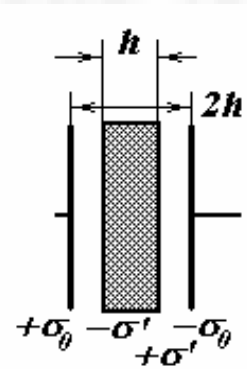
при выводе учтены соотношения (3) и (5). Теперь из соотношений (2)-(4) необходимо выразить компоненту скорости  $v_y$

$$v_y^2 = \frac{1 + \eta}{2 + \eta} v_0^2. \quad (7)$$

Подставляя выражения (7) и (1) в формулу (6), получаем окончательное выражение

$$S = 2 \frac{1 + \eta}{2 + \eta} S_0 \approx 3,6 \text{ м}. \quad (8)$$

10.3 Обозначим поверхностную плотность зарядов на обкладках конденсатора  $\sigma_0$ , а на поверхности пластины  $\sigma'$  (обе эти величины зависят от времени). Так как внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало, то в любой момент времени разность потенциалов между обкладками конденсатора будет равна напряжению источника. Поэтому в любой момент времени справедливо соотношение



$$\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} h + \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0} h = U, \quad (1)$$

где  $\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0}$  - напряженности электрических полей между пластиной

и обкладками и внутри пластины, соответственно.

Сразу после подключения источника на пластине возникнут поляризованные заряды, такие, что поле внутри пластины будет в  $\epsilon$  раз меньше поля вне ее, то есть

$$\frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (2)$$

Из этих соотношений находим, что плотность зарядов на обкладке конденсатора будет равной

$$\sigma_0^{(0)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{\varepsilon_0 U}{h}, \quad (3)$$

следовательно, в начальный момент времени заряд пластины будет равен

$$Q_0 = S \sigma_0^{(0)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{\varepsilon_0 U S}{h}. \quad (4)$$

Однако, пластина слабо, но проводит электрический ток. Поэтому внутри пластины ток будет течь до тех пор, пока поле внутри пластины не исчезнет. Это произойдет при  $\sigma_0 = \sigma'$ . В этом случае из соотношения (1) следует

$$\sigma_0^{(1)} = \frac{\varepsilon_0 U}{h}, \quad (3)$$

соответствующий заряд на обкладке примет значение

$$Q_1 = S \sigma_0^{(1)} = \frac{\varepsilon_0 U S}{h}. \quad (4)$$

Таким образом, заряд на пластине будет монотонно возрастать от  $Q_0$  до  $Q_1$ .

Изменение поверхностной плотности заряда обусловлено током внутри пластины.

Плотность этого тока может быть найдена по закону Ома

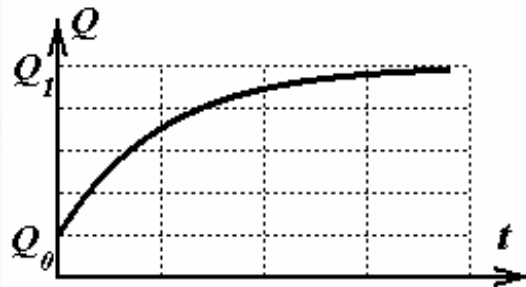
$$j = \frac{\Delta \sigma'}{\Delta t} = \frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\rho \varepsilon_0}. \quad (5)$$

Плотность тока максимальна, когда максимально поле внутри пластины, то есть в начальный момент времени, когда

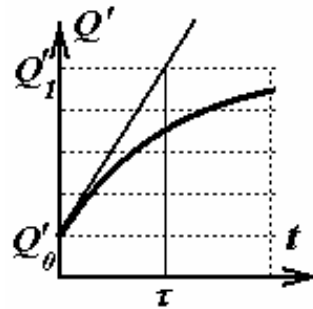
$$j_{max} = \frac{\Delta \sigma'}{\Delta t} = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\rho \varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\rho \varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{U}{h \rho (\varepsilon + 1)}, \quad (6)$$

следовательно, максимальная сила тока

$$I_{max} = j_{max} S = \frac{US}{h \rho (\varepsilon + 1)}, \quad (6)$$



Строго говоря, время установления равновесия зарядов на пластине и обкладках конденсатора равно бесконечности, так как сила тока в соответствии с формулой (5) монотонно убывает. Однако характерное время зарядки конденсатора  $\tau$  мы можем получить, считая силу тока постоянной и равной  $I_{max}$ . Этот метод получения оценки иллюстрирует следующий рисунок.



Изменение заряда легко подсчитать - в начальный момент времени заряд поверхности пластины

$$Q'_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} Q_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{\varepsilon_0 US}{h}, \quad (7)$$

а его конечное значение

$$Q'_1 = Q_0 = \frac{\varepsilon_0 US}{h}. \quad (8)$$

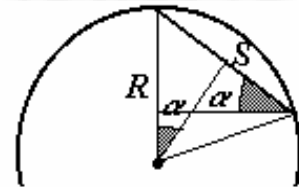
Итак, оценка характерного времени заряда имеет вид

$$\tau = \frac{Q'_1 - Q'_0}{I_{max}} = 2\rho\varepsilon_0. \quad (9)$$

10.3 Рассмотрим скольжение тела по произвольной прорези, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Ускорение тела, движущегося по наклонной плоскости без трения, определяется известной формулой

$$a = g \sin \alpha. \quad (1)$$

Длину этой прорези также не трудно найти: отмеченные на рисунке углы равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно, длина прорези равна  $S = 2R \sin \alpha$ .

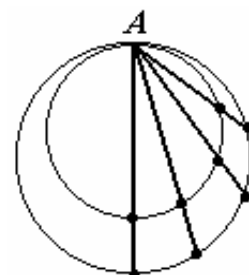
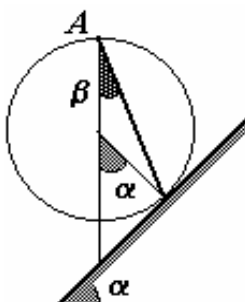


Используя закон равноускоренного движения  $S = \frac{at^2}{2}$ , найдем время движения

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{4R}{g}}, \quad (2)$$

которое не зависит от угла  $\alpha$ , следовательно, одинаково для всех прорезей.

Воспользуемся полученным результатом для решения второй части задачи. Представим, что из точки  $A$  одновременно по разным наклонным плоскостям начали скользить малые тела. Согласно ранее доказанному в любой момент времени они будут находиться на





одной окружности, радиус которой постоянно растет. Тогда первым достигнет наклонной плоскости тот брусок, который находится в точке касания окружности, касательной к плоскости. С помощью рисунка легко доказать, что искомый угол желоба с вертикалью равен половине угла  $\alpha$ , то есть  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ .

10.4 Внутренняя энергия газов до их смешивания определяется формулой

$$U_1 = \frac{5}{2} \nu_1 RT_1 = \frac{5}{2} P_1 V; \quad (1)$$

$$U_2 = \frac{5}{2} \nu_2 RT_2 = \frac{5}{2} P_2 V;$$

где  $\nu_1, \nu_2$  - количества молей каждого газов, при выводе соотношений (1) также принято во внимание уравнение состояния идеального газа. После смешивания внутренняя энергия системы не изменяется, причем

$$U = U_1 + U_2 = \frac{5}{2} (\nu_1 + \nu_2) RT = \frac{5}{2} P \cdot 2V. \quad (2)$$

Из этих соотношений сразу следует, что конечное давление равно среднему арифметическому исходных давлений

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2}. \quad (4)$$

Для расчета конечной температуры необходимо выразить из уравнения состояния количества вещества каждого из газов

$$\nu_1 = \frac{P_1 V}{RT_1}; \quad \nu_2 = \frac{P_2 V}{RT_2}; \quad \nu_1 + \nu_2 = \frac{P \cdot 2V}{RT} \quad (5)$$

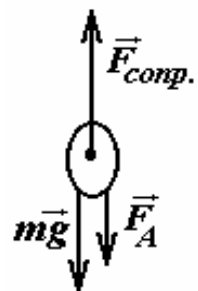
и подставить их в формулу (2). Тогда, с учетом (4), получаем следующий результат

$$T = \frac{P_1 + P_2}{\frac{P_1}{T_1} + \frac{P_2}{T_2}}. \quad (6)$$

10.5 При подъеме шара, на него действуют: сила тяжести  $m\vec{g}$ , подъемная сила Архимеда  $\vec{F}_A$ , сила сопротивления  $\vec{F}_{\text{сопр.}} = -\beta\vec{v}$ , пропорциональная скорости подъема. Следовательно, уравнение второго закона Ньютона для шара будет иметь вид

$$ma = F_A - mg - \beta v. \quad (1)$$

Так как шар движется в воздухе достаточно медленно, то можно считать, что в любой момент времени сила сопротивления



уравновешивает разность сил Архимеда и тяжести. Иными словами, можно пренебречь инерционными эффектами и положить  $ma = 0$ . Тогда из уравнения (1) получим выражение для скорости подъема

$$\beta v = F_A - mg. \quad (2)$$

Подъемная сила вычисляется по формуле

$$F_A = Vg(\rho_0 - \rho), \quad (3)$$

где  $\rho_0, \rho$  - плотности холодного (наружного) и теплого (внутри шара) воздуха. Эти плотности можно выразить из уравнения состояния

идеального газа  $PV = \frac{m}{M}RT$ :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}. \quad (4)$$

Используя формулы (3)-(4), получаем выражение для скорости подъема

$$\beta v = Vg \frac{PM}{R} \left( \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T} \right) - mg. \quad (5)$$

Неизвестный коэффициент  $\beta$  можно получить из аналогичной формулы для начальной скорости. Таким образом, окончательное выражение для скорости подъема принимает «несколько угрожающий» вид

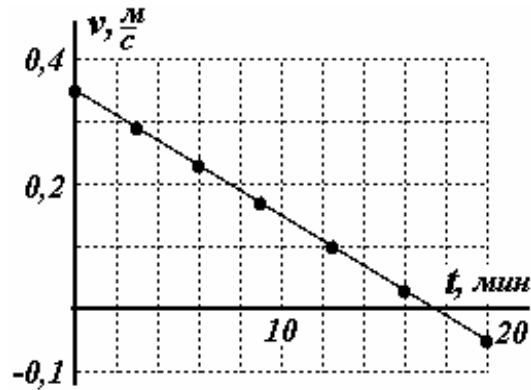
$$v = \frac{Vg \frac{PM}{R} \left( \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T} \right) - mg}{Vg \frac{PM}{R} \left( \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_0} \right) - mg}. \quad (6)$$

По этой формуле с помощью приведенного в условии графика зависимости температуры от времени можно построить зависимость скорости подъема от времени. Для ускорения последующих расчетов в формуле (6) необходимо провести промежуточные вычисления (приведя все величины в систему СИ) и привести ее к виду, пригодному для расчетов

$$v = 2,305 - \frac{690}{273 + t^\circ}, \quad (7)$$

где  $t^\circ$  - температура внутри шара, измеренная по шкале Цельсия. Результаты расчетов приведены в таблице и на графике.

$\tau, \text{мин}$	$t^\circ \text{C}$	$v, \frac{\text{м}}{\text{с}}$
0	80	0,39
3	70	0,29
6	60	0,23
9	50	0,17
12,5	40	0,10
16	30	0,03
20	20	-0,05



Таким образом, мы получили, что скорость подъема убывает по линейному закону. Время подъема составляет примерно  $\tau \approx 18 \text{ мин}$ . Следовательно, высота подъема  $H = \frac{v_0 \tau}{2} \approx 190 \text{ м}$ .

## 11 класс.

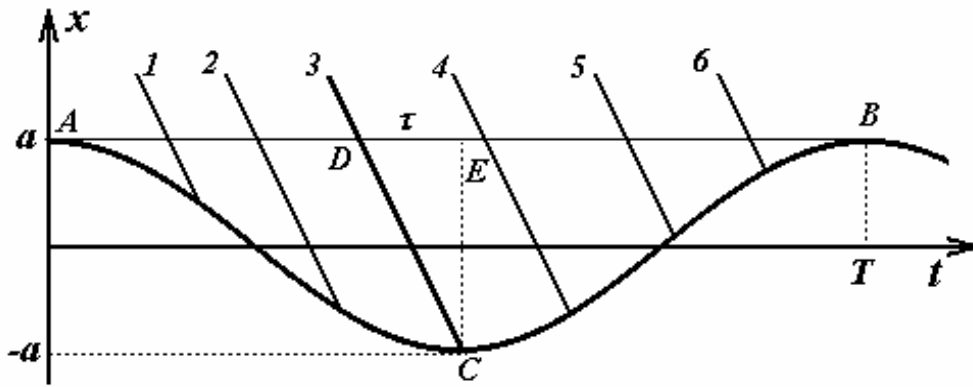
11.1 Понятно, что после удара шарик подпрыгнет выше первоначального уровня, если после удара модуль его скорости станет больше. В свою очередь это произойдет в том случае, когда в момент удара платформа движется вверх, навстречу шарика. Так как время бросания произвольно, то, казалось бы, момент попадания шарика на платформу так же произволен, поэтому приблизительно половина шариков получит приращение скорости, а вторая половина свою скорость уменьшит. Однако рассмотрим повнимательнее кинематические законы движения шариков и платформы. Пусть закон движения платформы описывается функцией

$$x_0 = a \cos \omega t. \quad (1)$$

Так как амплитуда колебаний в сто раз меньше высоты падения шарика, можно пренебречь изменением скорости шарика, когда он движется в пределах амплитуды колебания, поэтому его закон движения можно описать линейной функцией

$$x = b - v_0 t, \quad (2)$$

где  $v_0 = \sqrt{2gh}$  - скорость движения шарика,  $b$  - некоторая константа, зависящая от момента бросания шарика (ее следует считать некоторой случайной величиной). Ясно, что для решения задачи достаточно рассмотреть один период колебания платформы.



На рисунке изображены графики законов движения платформы (синусоида) и некоторых шариков (наклонные прямые линии). Из-за случайности времени бросания шарик будет достигать верхнего уровня колебаний платформы в произвольные случайные моменты времени. Иными словами, график закона движения шарика пересекает прямую  $AB$  в произвольный момент времени. Однако, как хорошо видно на рисунке, моменты столкновений (пересечений с синусоидой) распределяются не равномерно. Так столкновение с движущейся вверх платформой произойдет в том случае, когда линия закона движения шарика пересечет  $AB$  на участке  $DB$ , который больше отрезка  $AD$  (в этом случае произойдет пересечение со спадающей ветвью синусоиды). «Критической» является прямая пересекающая синусоиду в нижней точке. Таким образом, доля шариков, которые увеличат свою скорость в результате столкновения, равна отношению длин отрезков  $DB$  и  $AB$ . Последний из них равен периоду колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{l}{v}$ . Также легко определить из закона движения величину отрезка  $DE$ :

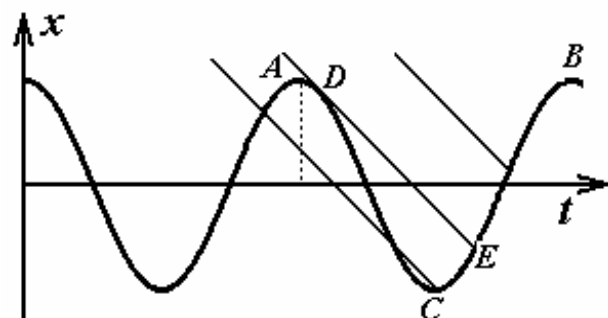
отрезка  $DE$ :

$$\tau = \frac{2a}{v_0}. \quad (3)$$

Окончательно, доля шариков, которые подпрыгнут выше исходного уровня, определяется формулой

$$\eta = \frac{\tau + \frac{T}{2}}{T} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2} + \frac{2av}{\sqrt{2gh}} \approx 0,73. \quad (4)$$

При увеличении частоты колебаний методика расчета может претерпеть существенные изменения.



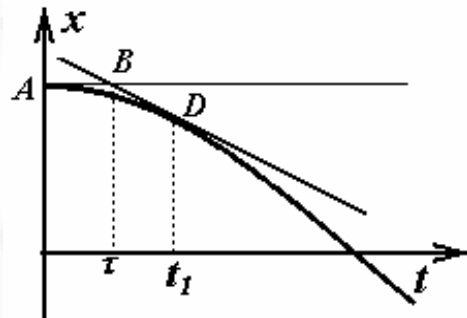
Так график закона движения шарика может пересечь синусоиду в нескольких точках (см. рис.). Видно, что на синусоиде появляется «мертвая зона» - участок  $DCE$ , в котором не может вообще произойти столкновения - шарик не может догнать платформу. Шарик уменьшит свою скорость, если пересечение с синусоидой произойдет на малом участке  $AD$ , где  $D$  точка касания прямой закона движения шарика с синусоидой. Рассмотрим этот участок подробнее.

Пусть  $D$  точка касания (момент этого касания обозначим  $t_1$ ). Тогда интервал времени достижения верхнего уровня колебаний платформы, в течение которого столкновение приведет к уменьшению скорости, изобразится отрезком  $AB$  (длину этого участка обозначим  $\tau$ ). В этом случае доля шариков, увеличивших скорость, рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{T - \tau}{T}, \quad (5)$$

из которой следует, что величина интервала  $AB$  должна быть равна

$$\tau = (1 - \eta)T = (1 - \eta) \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6)$$



Закон движения шарика (2), при котором он достигает точки  $x = a$  в момент времени  $\tau$ , имеет вид

$$x = a - v_0(t - \tau). \quad (7)$$

Чтобы в момент времени  $t_1$  произошло касание (как шарика с платформой, так и графиков их законов движения) необходимо, чтобы в этой части были равны функции и их производные, то есть

$$\begin{cases} a \cos \omega t_1 = a - v_0(t_1 - \tau); \\ -a \sin \omega t_1 = -v_0 \end{cases}; \quad (8)$$

Уравнения (8) являются системой с двумя неизвестными величинами -  $\omega, t_1$ , поэтому может быть решена. К сожалению, эта система не может быть решена «в квадратурах», однако величина  $\tau$  и, следовательно,  $t_1$  являются малыми, поэтому можно воспользоваться приближенными формулами для тригонометрических функций

$$\sin \omega t_1 \approx \omega t_1, \quad \cos \omega t_1 \approx 1 - \frac{(\omega t_1)^2}{2}. \quad (9)$$

В этом приближении система уравнений (8) легко решается (конечно, с учетом выражения (6)) -

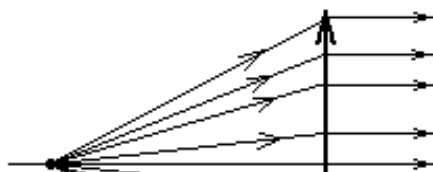
$$v = \frac{v_0}{8\pi^2 a(1 - \eta)} \approx 0,56 \cdot 10^3 \text{ Гц}. \quad (10)$$

11.2 Для расчета силы светового давления воспользуемся корпускулярными представлениями о природе света. Каждый фотон обладает энергией  $\varepsilon$  и импульсом  $p$ , которые определяются формулами

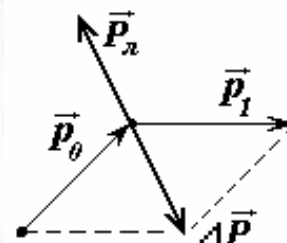
$$\varepsilon = h\nu, \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{\varepsilon}{c}, \quad (1)$$

где  $\nu$  - частота света,  $h$  - постоянная Планка,  $c$  - скорость света.

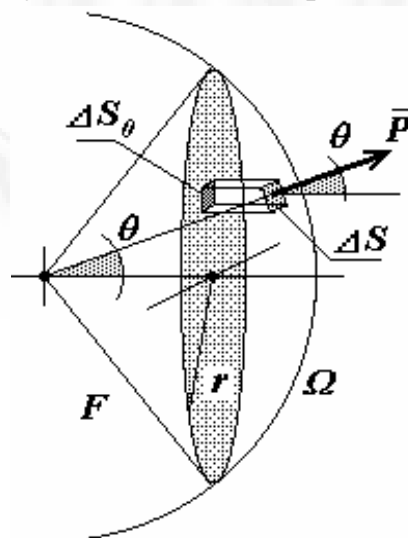
Всякое изменение направления распространения приводит к изменению направления вектора импульса, следовательно, должно сопровождаться появлением силы светового давления. При прохождении света через линзу расходящийся пучок превращается в параллельный.



Рассмотрим изменение импульса отдельного фотона при его преломлении в линзе. Если до линзы импульс фотона был  $\vec{p}_0$ , а после прохождения стал  $\vec{p}_1$  (модуль вектора при этом, естественно, не изменяется), то фотон получил приращение импульса  $\Delta\vec{p}$ . Равный ему, но противоположный по направлению импульс  $\vec{p}_x$  получит линза. Таким образом, в целом линза получит импульс, направленный в сторону источника - линза притягивается к источнику!



Для расчета силы, действующей на линзу необходимо рассчитать суммарное изменение импульса света при его прохождении через линзу. Рассмотрим сферическую поверхность с центром на источнике света, с радиусом равным фокусному расстоянию. Через линзу пройдут те фотоны, которые летят в пределах телесного угла, опирающегося на линзу. После преломления все эти фотоны будут двигаться вдоль оптической оси, поэтому импульс переносимый этими фотонами в единицу времени можно подсчитать следующим образом. Поток энергии, деленный на скорость света, равен потоку импульса (то есть, импульсу, переносимому в единицу времени). Плотность этого потока (поток через единичную площадь) на выбранной нами сфере определяется выражением



$$G = \frac{I}{4\pi F^2 c}. \quad (2)$$

Тогда поток импульса фотонов, прошедших через линзу, равен

$$P_1 = GS_{\Omega} = \frac{I}{4\pi F^2 c} \cdot 2\pi F \left( F - \sqrt{F^2 - r^2} \right) = \frac{I}{2c} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{F^2}} \right), \quad (3)$$

здесь  $S_{\Omega}$  - площадь поверхности сферического сегмента, опирающегося на линзу.

Для подсчета импульса этих фотонов до преломления в линзе необходимо просуммировать проекции импульсов на направление оптической оси, так как из осевой симметрии следует, что суммарный импульс будет направлен вдоль оси. Разобьем поверхность сферы на малые участки  $\Delta S$ , запишем выражение для проекции потока импульса через этот участок

$$\Delta P_{0z} = G \Delta S \cos \theta, \quad (4)$$

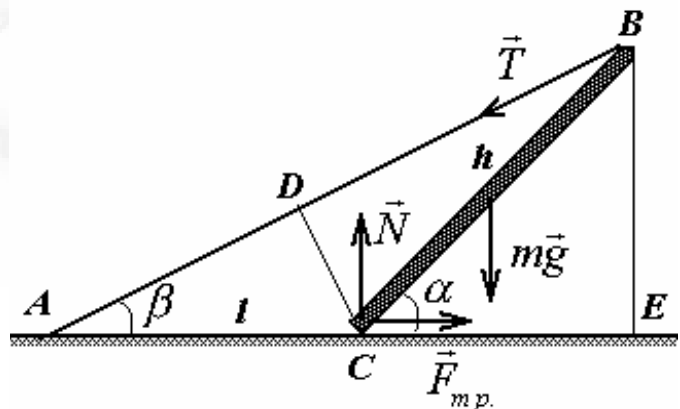
и обратим внимание, что  $\Delta S \cos \theta = \Delta S_0$  есть площадь проекции выделенного участка на плоскость линзы. Поэтому сумма величин типа (4) будет равна произведению плотности потока импульса на площадь линзы

$$P_0 = G \pi r^2 = \frac{I}{2c} \cdot \frac{r^2}{2F^2}. \quad (5)$$

Таким образом, сила давления  $f$  равна разности потоков импульсов (3) и (5)

$$f = \frac{I}{2c} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{F^2}} - \frac{r^2}{2F^2} \right). \quad (6)$$

11.3 На рисунке изображены силы, действующие на обелиск во время подъема (все обозначения традиционные). Для того чтобы обелиск не соскользнул с фундамента, необходимо, чтобы сила трения покоя не превысила своего максимального значения  $\mu N$ . Будем считать,



что подъем осуществляется медленно, поэтому в любой момент времени сумма сил равна нулю. Это условие в проекции на горизонтальное и вертикальное направления имеет вид

$$\begin{aligned} F_{\text{тр.}} &= T \cos \beta \\ N &= mg + T \sin \beta \end{aligned} \quad (1)$$

Следовательно, условие возможности подъема записывается в виде неравенства

$$T \cos \beta \leq \mu(mg + T \sin \beta). \quad (2)$$

Для определения силы натяжения троса запишем условие равновесия для моментов сил относительно точки опоры

$$Tl \sin \beta = mg \frac{h}{2} \cos \alpha, \quad (3)$$

здесь  $l \sin \beta$  плечо силы натяжения троса. Из этого уравнения найдем

$$T = \frac{mg \cos \alpha}{4 \sin \beta}$$

и подставим в неравенство (2), которое упрощается

$$\mu \geq \frac{\cos \alpha}{(4 + \cos \alpha) \operatorname{tg} \beta}. \quad (4)$$

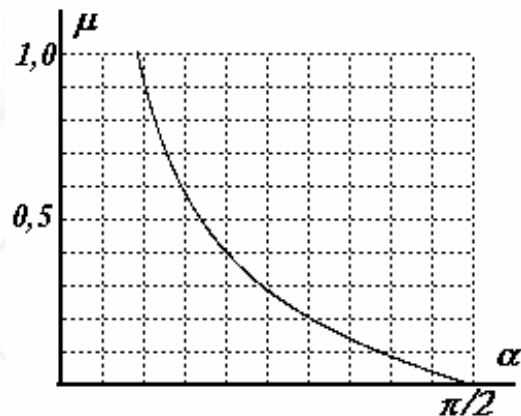
Тангенс угла  $\beta$  выразим из треугольника  $ABE$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h \sin \alpha}{l + h \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}. \quad (5)$$

Окончательно, получаем требуемое условие

$$\mu \geq \frac{(2 + \cos \alpha) \cos \alpha}{(4 + \cos \alpha) \sin \alpha}. \quad (6)$$

Можно показать (на рис. показан ее график), что стоящая справа функция является монотонно убывающей, поэтому, если скольжение не началось в начальный момент подъема (при минимальном значении угла  $\alpha$ ), то оно не начнется и позже.



11.4 При взаимном движении колец будет изменяться магнитный поток поля, создаваемого одним кольцом, через другое, что приведет к появлению ЭДС индукции и, следовательно, изменению силы тока, что, в свою очередь, вызовет возникновение ЭДС самоиндукции. Так кольца являются сверхпроводящими, то суммарная ЭДС должна быть равна нулю. Из закона электромагнитной индукции

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad (1)$$

следует постоянство магнитного потока через каждое кольцо. Когда кольца будут разнесены на очень большое расстояние, этот поток будет создаваться только током в самом кольце. В начальном состоянии поток создавался током силой  $2I_0$ , следовательно, при удалении колец ток в каждом из них увеличится в два раза, то есть



станет равным  $2I_0$ . Работа по разнесению колец пойдет на увеличение энергии магнитного поля, поэтому будет равна

$$A = 2 \frac{L(2I_0)^2}{2} - \frac{L(2I_0)^2}{2} = 2LI_0^2. \quad (2)$$

11.5 Запишем уравнение первого начала термодинамики

$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

Для адиабатного процесса  $Q = 0$ , кроме того, для идеального газа внутренняя энергия не зависит от объема газа, поэтому изменение внутренней энергии газа задается формулой  $\Delta U = C_V \Delta T$ . Так как в нашем случае теплоемкость газа изменяется, необходимо рассматривать малые интервалы изменения температуры. Традиционное выражение для совершенной газом работы  $A = P \Delta V$  необходимо преобразовать с использованием уравнения состояния идеального газа  $PV = RT$ . Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (1) принимает вид

$$C_V \Delta T + \frac{RT}{V} \Delta V = 0, \quad (2)$$

из которого выразим зависимость изменения объема от изменения температуры

$$\Delta V = -V \frac{C_V \Delta T}{RT} = -cV \frac{\Delta T}{T}, \quad (3)$$

где обозначено  $c = \frac{C_V}{R}$  - величина, приведенная на графике.

Уравнение (3) необходимо решать численно, разбивая заданный диапазон изменения температуры на небольшие интервалы  $\Delta T$ . Для увеличения точности расчетов в качестве  $c$  и  $T$  следует брать средние значения этих величин на выбранном интервале. Если мы пронумеруем точки разбиения диапазона индексом  $k$ , то схему расчетов можно представить в виде

$$\Delta V = -\frac{c_k + c_{k+1}}{2} V_k \frac{2\Delta T}{T_k + T_{k+1}} = -V_k \frac{c_k + c_{k+1}}{T_k + T_{k+1}} \Delta T; \quad (4)$$

$$V_{k+1} = V_k + \Delta V; \quad P_k = \frac{RT_k}{V_k}$$

В таблице представлены результаты расчетов, проведенные при шаге  $\Delta T = -50 K$ . Отрицательное значение этой величины обусловлено начальным условием - объем задан при максимальной температуре.

При расчетах на калькуляторе удобнее сначала подсчитать значения всех объемов, а уже затем соответствующие значения давлений.

$T, K$	$\bar{c}$	$V, л$	$\Delta V, л$	$P, (10^5 Па)$
--------	-----------	--------	---------------	----------------

800	3,16	1,0	0,20	66,5
750	3,14	1,20	0,26	51,9
700	3,12	1,46	0,34	39,8
650	3,10	1,80	0,45	30,0
600	3,07	2,25	0,60	22,2
550	3,03	2,85	0,82	16,0
500	3,00	3,67	1,2	11,3
450	2,95	4,83	1,7	7,74
400	2,90	6,51	2,5	5,10
350	2,85	9,03	3,9	3,22
300		13,0		1,92



Ниже эти же данные представлены в виде графика. Сплошная линия - адиабата для постоянного значения теплоемкости  $C_V = 3R$ . Практически полное совпадение свидетельствует, с одной стороны, о слабом влиянии изменения теплоемкости, а с другой, о достаточно высокой точности примененной процедуры расчета.

