

Решения задач.

10 класс двенадцатилетней школы

Задание 10(12)-1. «Разминка»

1.1 Закон изменения вертикальной координаты камушка имеет вид

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

Полагая координату равной высоте h , получим квадратное уравнение, для определения времени

$$\frac{gt^2}{2} - v_0 t \sin \alpha + h = 0. \quad (2)$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (v_0 \sin \alpha)^2 - 2gh. \quad (3)$$

Для высоты $h_1 = 2,5$ м его численное значение равно

$$D_1 = (v_0 \sin \alpha)^2 - 2gh_1 = (15 \cdot 0,5)^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 2,5 = 7,25 \frac{m^2}{c^2}.$$

Следовательно, уравнение (2) имеет два корня

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{D}}{g} = \frac{15 \cdot 0,5 \pm \sqrt{7,25}}{9,8} \Rightarrow t_1 = 0,49 c; \quad t_2 = 1,0 c. \quad (4)$$

Оба корня имеют физический смысл, так как камушек будет находиться на указанной высоте дважды – при подъеме и при спуске.

Для второго значения высоты $h_2 = 3,0$ м дискриминант квадратного уравнения (2)

$$D_2 = (v_0 \sin \alpha)^2 - 2gh_2 = (15 \cdot 0,5)^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 3,0 = -2,6 \frac{m^2}{c^2}$$

отрицательный, поэтому уравнение корней не имеет. Это означает, что камушек на эту высоту не поднимется.

1.2 Обозначим напряжение на лампочке U . Из формулы приведенной в условии $I = a\sqrt{U}$, следует, что это напряжение связано с искомой силой тока соотношением

$$U = \frac{1}{a^2} I^2. \quad (1)$$

Напряжение на резисторе, по закону Ома, равно

$$U_R = IR_0. \quad (2)$$

Сумма этих напряжений равна напряжению источника

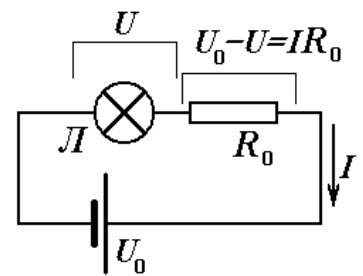
$$\frac{1}{a^2} I^2 + IR_0 = U_0 \quad (2)$$

Дискриминант этого квадратного уравнения

$$D = R_0^2 + 4 \frac{U_0}{a^2} \quad (3)$$

положительный, поэтому уравнение (2) имеет два корня

$$I = \frac{a^2}{2} \left(-R_0 \pm \sqrt{R_0^2 + 4 \frac{U_0}{a^2}} \right).$$

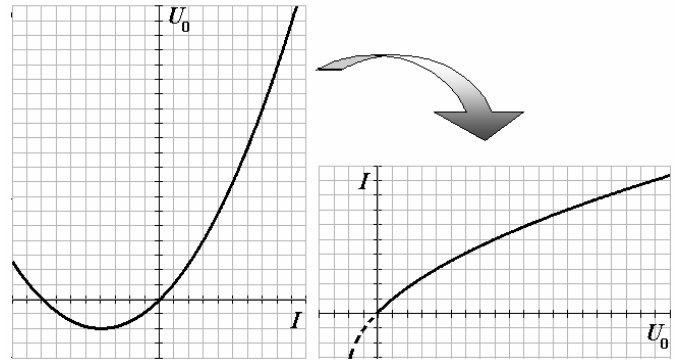


Однако, отрицательный корень уравнения (2) смысла не имеет (ни математического – он появился при возведении исходной формулы в квадрат, ни физического), поэтому ответом данной задачи является формула

$$I = \frac{a^2}{2} \left(\sqrt{R_0^2 + 4 \frac{U_0}{a^2}} - R_0 \right). \quad (4)$$

Заметим, что при $R_0 \rightarrow 0$, она переходит в формулу, приведенную в условии.

График полученной зависимости может быть построен на основании уравнения (2): зависимость $U_0(I)$ - изображается банальной параболой. Для получения обратной зависимости необходимо выбрать ее нужный участок, а затем его повернуть и отразить.



1.3 Крайне незначительная разность теплот возникает из-за разного понижения центра масс льда при его плавлении, из-за чего уменьшается потенциальная энергия воды. Эта энергия затрачивается на плавление льда.

Высота уровня воды (сначала в твердом, а затем в жидком состоянии) может быть найдена из очевидного выражения

$$m = \rho V = \rho S h \Rightarrow h = \frac{m}{\rho S}.$$

Изменение высоты уровня при плавлении рассчитывается по формуле

$$\Delta h = \frac{m}{S} \left(\frac{1}{\rho_{\text{льда}}} - \frac{1}{\rho_{\text{воды}}} \right). \quad (1)$$

Следовательно, уменьшение потенциальной энергии (и равное ей количество теплоты) при плавлении льда равно

$$Q = mg\Delta h = \frac{1}{2} \frac{m^2 g}{S} \left(\frac{1}{\rho_{\text{льда}}} - \frac{1}{\rho_{\text{воды}}} \right). \quad (2)$$

Теперь видим, что эта теплота зависит от площади сосуда и в более узком сосуде она больше. Следовательно, искомая разность теплот равна

$$\delta Q = \frac{m^2 g}{2S} \left(\frac{1}{\rho_{\text{льда}}} - \frac{1}{\rho_{\text{воды}}} \right) - \frac{m^2 g}{4S} \left(\frac{1}{\rho_{\text{льда}}} - \frac{1}{\rho_{\text{воды}}} \right) = \frac{m^2 g}{4S} \left(\frac{1}{\rho_{\text{льда}}} - \frac{1}{\rho_{\text{воды}}} \right).$$

Задание 10(12)-2 . «Труба дело»

Электрическое сопротивление металлической трубы равно

$$R = \frac{\gamma_M L}{S_M} = \frac{\gamma_M L}{2\pi r h} = 2,71 \cdot 10^{-4} \text{ Ом.} \quad (1)$$

Мощность, которая выделяется при протекании электрического тока в трубе по закону Джоуля-Ленца равна

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 2\pi r h}{\gamma_M L} = 179 \text{ МВт.} \quad (2)$$

Время, за которое растает весь лед в трубе, определим из уравнения теплового баланса. Теплота, выделившаяся при протекании электрического тока, пошла на нагревание льда на $\Delta T = 10 \text{ град}$ и его плавление

$$P\tau_1 = Q_{\text{л}}, \quad (3)$$

$$P\tau_1 = \pi r^2 L \rho_{\text{л}} (\lambda_{\text{л}} + c_{\text{л}} \Delta T), \quad (4)$$

$$\tau_1 = \frac{r L^2 \rho_{\text{л}} (\lambda_{\text{л}} + c_{\text{л}} \Delta T) \gamma_M}{2U^2 h} = 22,2 \text{ с.} \quad (5)$$

Если на нагревание льда в трубе тратится часть α тепловой мощности P , то потребуется большее время для плавления льда:

$$\alpha P \tau_2 = \pi r^2 L \rho_{\text{л}} (\lambda_{\text{л}} + c_{\text{л}} \Delta T), \quad (6)$$

$$\tau_2 = \frac{r L^2 \rho_{\text{л}} (\lambda_{\text{л}} + c_{\text{л}} \Delta T) \gamma_M}{2\alpha U^2 h} = 44,4 \text{ с.} \quad (7)$$

Стоит отметить, что это время пропорционально радиусу трубы

$$\tau = br, \quad (8)$$

где $b = \frac{L^2 \rho_{\text{л}} (\lambda_{\text{л}} + c_{\text{л}} \Delta T) \gamma_M}{2\alpha U^2 h} = 222 \frac{\text{с}}{\text{м}}$.

Оставшаяся мощность $(1-\alpha)P$ пойдет на нагревание окружающей почвы и плавление льда в ней. За время t оттаит почва в пределах цилиндра радиусом x , который найдем из уравнения теплового баланса

$$(1-\alpha)Pt = \pi(x^2 - (r+h)^2)L[\beta\rho_{\text{л}}(\lambda_{\text{л}} + c_{\text{л}}\Delta T) + (1-\beta)\rho_{\text{н}}c_{\text{н}}\Delta T], \quad (9)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках – теплоту оттаивания 1 м^3 почвы

$$B = \beta\rho_{\text{л}}(\lambda_{\text{л}} + c_{\text{л}}\Delta T) + (1-\beta)\rho_{\text{н}}c_{\text{н}}\Delta T = 50,5 \cdot 10^6 \text{ Дж / м}^3. \quad (10)$$

Итого

$$x = \sqrt{(r+h)^2 + \frac{(1-\alpha)Pt}{\pi LB}}. \quad (11)$$

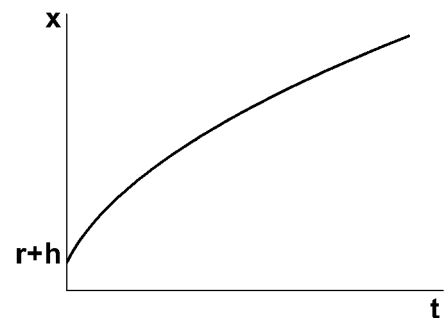
Примерный график этой зависимости изображен на рисунке.

Сопротивление оттаявшей почвы равно

$$R_n = \frac{\gamma_n L}{S_n} = \frac{\gamma_n L}{\pi(x^2 - (r+h)^2)} = \frac{\gamma_n L^2 B}{(1-\alpha)Pt}. \quad (12)$$

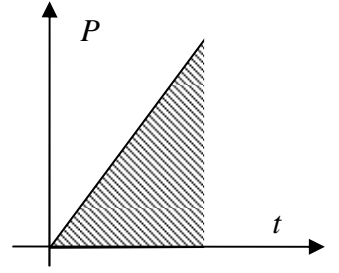
При этом по закону Джоуля-Ленца в почве выделяется дополнительная мощность

$$P_n = \frac{U^2}{R_n} = \frac{U^2(1-\alpha)Pt}{\gamma_n L^2 B}. \quad (13)$$



Дополнительная тепловая мощность не постоянна, а прямо пропорциональна времени, тогда количество теплоты, которое выделится за время t можно определить, как площадь под графиком мощности от времени.

$$Q_n = \frac{U^2(1-\alpha)P}{\gamma_n L^2 B} \frac{t^2}{2}. \quad (14)$$



За время τ_2 в почве выделится количество теплоты

$$Q_n(\tau_2) = \frac{U^2(1-\alpha)P}{\gamma_n L^2 B} \frac{\tau_2^2}{2}, \quad (15)$$

при этом от трубы почва получит теплоту

$$Q(\tau_2) = (1-\alpha)P\tau_2. \quad (16)$$

Отношение $\frac{Q_n(\tau_2)}{Q(\tau_2)} = \frac{U^2}{\gamma_n L^2 B} \frac{\tau_2}{2} = 0,01$, это означает, что дополнительно выделившейся в почве теплотой можно пренебречь.

Если x становится равно H , происходит «заземление» и нагревание трубы прекращается. Поскольку весь лед в трубе должен растопиться, то время τ_3 , за которое это произойдет, равно по формуле (8)

$$\tau_3 = br_{\max}. \quad (17)$$

Максимальный радиус трубы определяется из соотношения

$$H^2 = (r_{\max} + h)^2 + \frac{(1-\alpha)Pbr_{\max}}{\pi LB} = (r_{\max} + h)^2 + \frac{U^2 2\pi hr_{\max}}{\gamma_M L} \frac{(1-\alpha)br_{\max}}{\pi LB}. \quad (18)$$

Получается квадратное уравнение относительно r_{\max} :

$$\left(1 + \frac{2U^2 h(1-\alpha)b}{\gamma_M L^2 B}\right) r_{\max}^2 + 2hr_{\max} + h^2 - H^2 = 0, \quad (19)$$

которое несколько упрощается, учитывая малость h по сравнению с H и r_{\max} :

$$\left(1 + \frac{2U^2 h(1-\alpha)b}{\gamma_M L^2 B}\right) r_{\max}^2 - H^2 = 0, \quad (20)$$

$$r_{\max} = \frac{H}{\sqrt{\left(1 + \frac{2U^2 h(1-\alpha)b}{\gamma_M L^2 B}\right)}} = 0,37 м. \quad (21)$$

Произойдет это за время

$$\tau_3 = br_{\max} = 82 с. \quad (22)$$

Задание 10(12)-3. «Колонна автомобилей»

1.1 Рассчитаем интервал времени τ_1 за который автомобиль достигает требуемой скорости постоянного движения, используя закон равноускоренного движения

$$v_0 = a_0 \tau_1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{v_0}{a_0} = \frac{20 \frac{M}{c}}{2,0 \frac{M}{c^2}} = 10c. \quad (1)$$

За это время он пройдет путь, равный

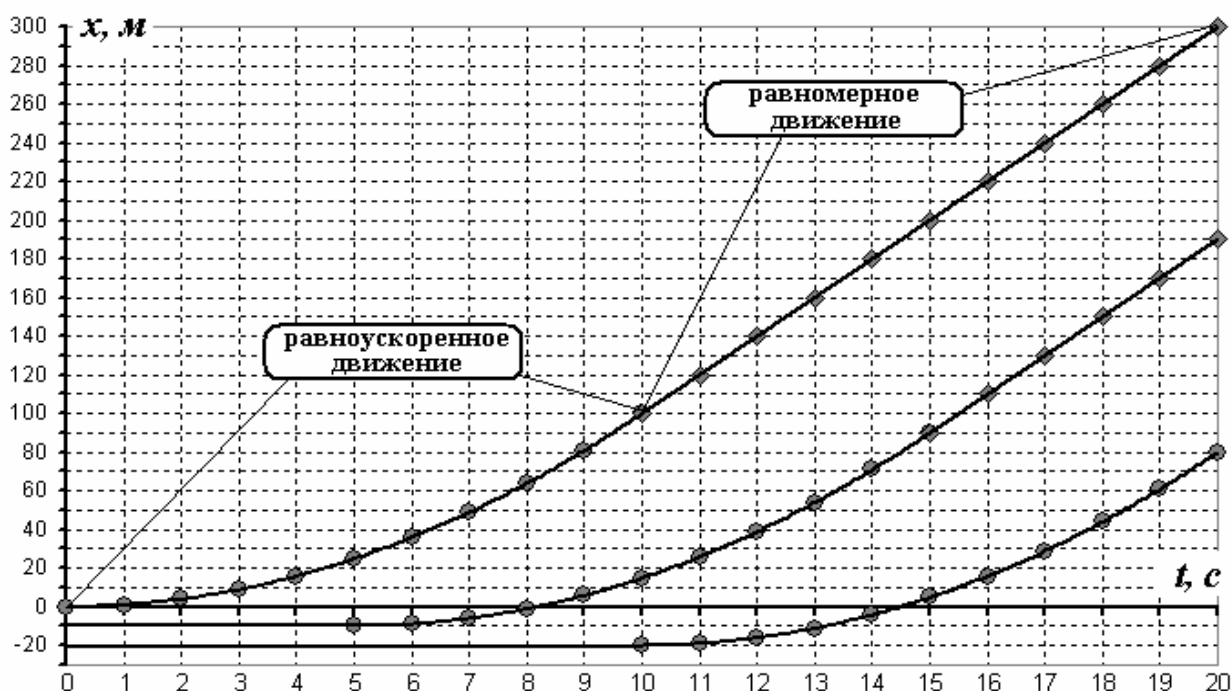
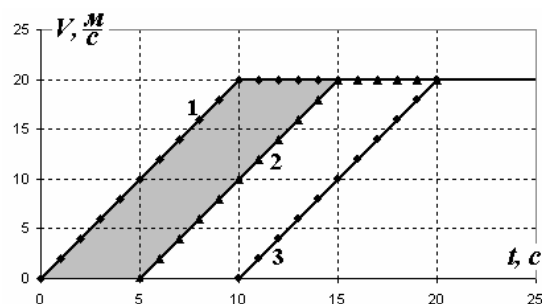
$$s = \frac{a_0 \tau^2}{2} = \frac{v_0^2}{2a_0} = 100M. \quad (2)$$

Это расстояние больше чем расстояние l_1 , при котором трогается следующий автомобиль. Следовательно, следующий автомобиль тронется раньше, чем первый достигнет скорости v_0 , а именно в момент времени τ_1 , который найдем из закона движения

$$l_1 - l_0 = \frac{a_0 \tau^2}{2} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2(l_1 - l_0)}{a_0}} = 5,0c \quad (3)$$

Заметим, что время разгона связано с промежутком времени между началами движения автомобилей простым соотношением $\tau_1 = 2\tau$.

Таким образом, первый автомобиль в течение промежутка времени 2τ будет двигаться равноускоренно, с ускорением a_0 (график зависимости скорости от времени – наклонная прямая, график закона движения – парабола), а затем равномерно (график закона зависимости скорости от времени – горизонтальная прямая; график закона движения - наклонная прямая линия). График движения второго автомобиля аналогичен первому, только смещен на интервал времени τ и на расстояние $-l_0$; третий смещен по оси времени на 2τ и на $-2l_0$ по оси координат.



1.2 Расстояние между автомобилями (после того, как задний полностью набрал скорость), проще всего определить из графика зависимости скоростей от времени. Можно заметить, что площадь между графиками зависимостей скоростей двух автомобилей численно равна изменению расстояний между ними (на рисунке заштрихована). Легко определить, что изменение расстояния между двумя соседними автомобилями равно $\Delta l = v_0 \tau = 100 \text{ м}$. Следовательно, в процессе движения расстояние между автомобилями будет равным

$$l_2 = l_0 + v_0 \tau = 110 \text{ м}. \quad (4)$$

1.3 Число интервалов между N автомобилями есть $(N - 1)$, поэтому длина колонны равна

$$L = (N - 1)l_2 \approx 5,4 \text{ км}. \quad (5)$$

1.4 Так как автомобили трогаются через равные промежутки времени τ , и находятся на расстоянии l_0 , то скорость движения «волны разряжения» равна

$$V = -\frac{l_0}{\tau} = -2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (6)$$

Часть 2. «Остановка»

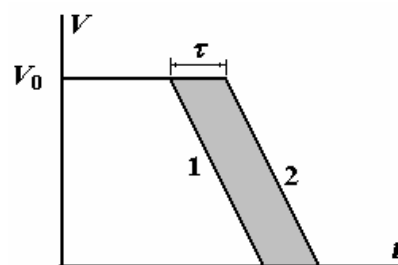
2.1 Изобразим схематически зависимости скоростей двух соседних автомобилей от времени в процессе их торможения. Как и ранее, площадь между графиками равна изменению расстояния между автомобилями, то есть $\Delta x = v_0 \tau$. Так как расстояние должно измениться на величину $\Delta l = l_1 - l_0$, то интервал времени между началами торможений должен быть равен

$$\tau_2 = \frac{\Delta l}{v_0} = 5,0 \text{ с}, \quad (7)$$

причем не зависимо от ускорения!

2.2 Времена между остановками автомобилей равны τ_2 , каждый следующий автомобиль останавливается на расстоянии $l_0 = 10 \text{ м}$, поэтому волна сжатия пробегает со скоростью

$$V = -\frac{l_0}{\tau_2} = -2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (8)$$



Задание 10(11)-1. «Разминка»

1.1 Будем считать, что при движении песчинки не мешают друг другу. Рассмотрим одну песчинку, находящуюся внутри вращающейся сферы. Поскольку трение в системе слабое, то примем, что движение песчинки происходит только под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и силы реакции опоры \vec{N} (см. рис).

В этом случае основной закон динамики примет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \quad (1)$$

Пусть в установившемся положении песчинки вектор силы реакции \vec{N} составляет угол α с вертикалью. Песчинка, вращаясь вместе со сферой, описывает окружность, радиус которой r найдем из рисунка

$$r = R \sin \alpha .$$

При движении по окружности ее центростремительное ускорение может быть найдено, как

$$a = a_{ц.с.} = \omega^2 r = \omega^2 R \sin \alpha . \quad (2)$$

Проецируя (1) на оси Ox и Oy получаем систему уравнений

$$\begin{cases} ma = N \sin \alpha \\ mg = N \cos \alpha \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы с учетом (2) найдем

$$m\omega^2 R \sin \alpha = N \sin \alpha ,$$

откуда, сокращая на $\sin \alpha$ ($\sin \alpha \neq 0$), получим

$$N = m\omega^2 R . \quad (3)$$

Подставляя (3) во второе уравнение системы, найдем

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R} . \quad (4)$$

Как следует из (4) установившееся положение песчинки однозначно определяется угловой скоростью ω вращения сферы, следовательно, песчинки при вращении сферы распределятся примерно равномерно и образуют кольцо, видимое из ее центра сферы под углом α (см. рис).

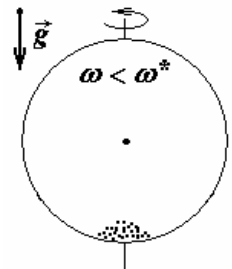
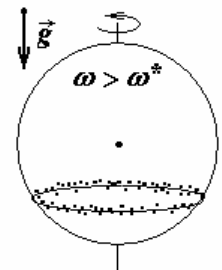
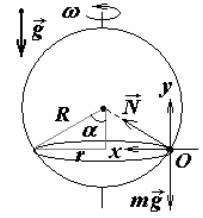
Это положение песчинок является устойчивым при больших угловых скоростях вращения, поскольку при любых малых смещениях песчинка стремится восстановить начальное значение угла α .

Так при $\omega \rightarrow \infty$ $\cos \alpha \rightarrow 0$, т.е. $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, и все песчинки соберутся «на экваторе» сферы. При этом радиус песчаного кольца станет равным радиусу сферы R .

При уменьшении угловой скорости вращения сферы до значения $\omega^* = \sqrt{\frac{g}{R}}$ косинус угла принимает свое максимальное значение, равное 1.

Соответственно, при $\omega < \omega^*$ все песчинки соберутся на дне сферы ($\alpha = 0$), образуя небольшую кучку (см.рис).

Это также будет устойчивое положение равновесия песчинок на дне сферы при малых угловых скоростях ее вращения.



1.2 Доски и цилиндр находятся в равновесии под действием сил тяжести ($M\vec{g}, m\vec{g}$), трения ($\vec{F}_{mp}, -\vec{F}_{mp}$) и реакций ($\vec{N}, -\vec{N}$), изображенных на рисунках. Силы реакции в оси O , на рисунке не показаны, поскольку их моменты относительно точки O равны нулю.

Запишем второе условие равновесия (правило моментов) для одной из досок относительно точки O

$$mg \frac{L}{2} \sin \alpha = N \frac{L}{2}. \quad (1)$$

Момент силы трения \vec{F}_{mp} также не входит в (1), поскольку линия ее действия проходит через ось вращения.

Поскольку цилиндр также находится в равновесии, то сумма сил, действующих на него должна быть равна нулю (рис. 01). Соответственно, первое условие равновесия, записанное для цилиндра в проекции на вертикальную ось, имеет вид

$$Mg + 2N \sin \alpha = 2F_{mp} \cos \alpha. \quad (2)$$

При записи (2) мы учли, что силы трения и реакции, действующие на цилиндр со стороны досок, согласно III закону Ньютона равны по модулю и противоположны по направлению соответствующим силам, действующим на доски со стороны цилиндра.

Из уравнений (1) – (2) получаем

$$N = mg \sin \alpha, \\ F_{mp} = \frac{Mg + 2mg \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

Поскольку предельное значение силы трения покоя определяется значением силы трения скольжения (явлением застоя пренебрежем), то

$$F_{mp} \leq \mu N. \quad (3)$$

Как следует из (3), система сможет находиться в равновесии только при выполнении условия

$$\mu \geq \frac{F_{mp}}{N}. \quad (4)$$

Из рисунка несложно выразить, что

$$\sin \alpha = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 + L^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}.$$

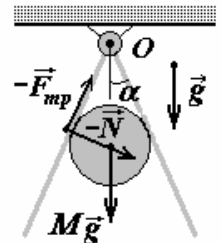
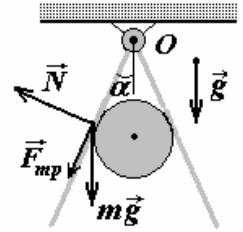
Из (4) с учетом выражений для силы трения и реакции, а также значений синуса и косинуса, получаем окончательный ответ

$$\mu \geq \frac{(L^2 + 4R^2)M}{4mRL} + \frac{2R}{L}.$$

Расчет дает

$$\mu \geq 1,0.$$

Полученное численное значение коэффициента трения достаточно большое, однако следует заметить, что современные синтетические материалы могут обладать даже бóльшими коэффициентами трения.



1.3 Для вычисления модуля вектора индукции магнитного поля на оси кольца с током используем закон Био-Савара-Лапласа, согласно которому малый элемент тока $(I\vec{\Delta l})_k$ создает на оси кольца индукцию

$$\Delta B_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\Delta l)_k}{r_k^2}.$$

Вектор $\Delta\vec{B}_k$ нормален вектору \vec{r}_k , проведенному от элемента тока в точку рассмотрения A (см.рис).

Поскольку все элементы тока $I\vec{\Delta l}_k$ находятся на одинаковом расстоянии $r_k = \sqrt{R^2 + z^2}$ от центра кольца и составляют с вертикалью одинаковый угол φ , то суммирование выполниться несложно

$$B = \sum_k \Delta B_{zk} = \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\Delta l)_k}{r^2} \cos \varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \varphi}{r^2} \sum_k \Delta l_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \varphi}{r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 IR}{2r^2} \cos \varphi.$$

Из рисунка следует, что $\cos \varphi = \frac{R}{r}$, с учетом выражения для расстояния r , получим окончательное выражение для модуля вектора индукции магнитного поля на расстоянии z от центра кольца.

$$B(z) = \frac{\mu_0 IR}{2r^2} \cos \varphi = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

На больших расстояниях z ($z \gg R$) от кольца слагаемым R^2 в знаменателе (1) можно пренебречь по сравнению со слагаемым z^2 . В результате получим

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \{z \rightarrow \infty\} \approx \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{z^3} = \frac{a}{z^3}. \quad (2)$$

Соответственно, выражение для искомого коэффициента a принимает вид

$$a = \frac{\mu_0 I R^2}{2}. \quad (3)$$

Как следует из (2) при падении колечка и приближении его к кольцу модуль магнитной индукции поля возрастает, т.е. магнитный поток через колечко увеличивается.

Приращение магнитного потока через колечко при смещении его на величину Δz

$$\Delta\Phi = -\pi r^2 B'(z) \Delta z.$$

Дифференцируя (2) по z , получим

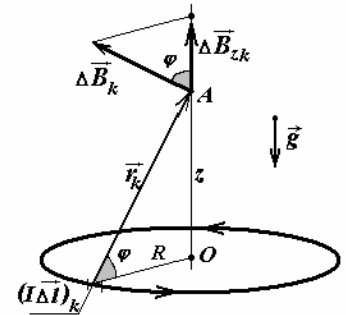
$$B'(z) = -\frac{3a}{z^4}.$$

Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в колечке возникнет ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{3\pi r^2 a}{z^4} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{3\pi r^2 a}{z^4} \cdot v(z). \quad (4)$$

Соответственно, сила индукционного (наведенного) тока в колечке оказывается пропорциональной его скорости движения

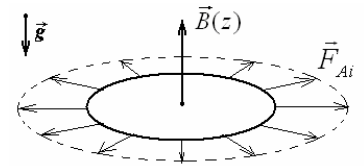
$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R_0} = \frac{3\pi r^2 a}{R_0 z^4} \cdot v(z). \quad (5)$$



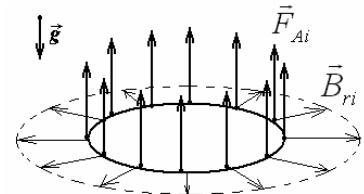
Поскольку в колечке появился индукционный ток, то на него со стороны магнитного поля кольца будут действовать силы Ампера.

Здесь следует заметить, что вертикальная (осевая) составляющая магнитного

поля $\vec{B}(z)$ создает элементарные силы Ампера \vec{F}_{Ai} , которые лишь деформируют (сжимают или растягивают) колечко, но не могут замедлить или ускорить его движения, поскольку не имеют вертикальной проекции.



А вот радиальные составляющие \vec{B}_{ri} индукции магнитного поля, возникающие вследствие рассеяния линий магнитной индукции от оси Oz , в силу правила Ленца притормаживают колечко, поскольку имеют вертикальные проекции (см. рис).



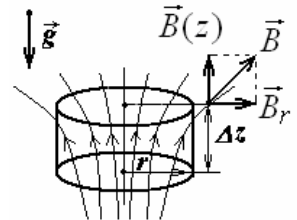
Для нахождения модуля B_r вблизи оси Oz применим теорему Гаусса для магнитного поля, которая утверждает, что поток вектора магнитной индукции по произвольной замкнутой поверхности равен нулю.

Рассмотрим цилиндр высотой Δz , радиус которого совпадает с радиусом колечка (см. рис). Будем считать, что в силу малости радиуса r колечка осевая составляющая $B(z)$ магнитного поля в его пределах меняется незначительно. Тогда разность магнитных потоков через нижнее и верхнее основания цилиндра

$$\Delta\Phi = \pi r^2 B'(z) \Delta z \quad (6)$$

в силу теоремы Гаусса должна быть равна потоку вектора индукции магнитного поля через боковую поверхность цилиндра

$$\Phi_{бок} = B_r 2\pi r \Delta z. \quad (7)$$



Равенства (6)-(7) имеют наглядный геометрический смысл: неразрывные линии магнитной индукции, вошедшие в цилиндр через нижнее основание, могут выйти из него или через верхнее основание, или через его боковую поверхность.

Приравнивая (5) и (6) получим

$$B_r = -\frac{B'(z)}{2} r = \frac{3}{2} \cdot \frac{ar}{z^4}. \quad (8)$$

Соответственно, для суммарной компоненты силы Ампера, тормозящей падение кольца, получим выражение

$$F_A = I_i B_r 2\pi r = \{(5), (8)\} = \frac{9\pi r^3 a^2}{2R_0 z^8} v(z). \quad (9)$$

Поскольку, согласно условию, ускорение кольца мало (гораздо меньше ускорения свободного падения), то можно считать, что кольцо в любой момент времени движется равномерно. Подобные процессы называются квазистационарными.

Для подобных процессов характерное время установления равновесного состояния системы (время релаксации) должно быть достаточно мало.

В рамках данной модели можем записать

$$mg = F_A = \frac{9\pi r^3 a^2}{2R_0 z^8} v(z).$$

Из полученного уравнения найдем искомую зависимость скорости установившегося падения кольца на высоте z

$$v(z) = \frac{2mgR_0 z^8}{9\pi r^3 a^2} = \frac{8mgR_0}{9\pi r^3 \mu_0^2 I^2 R^4} \cdot z^8. \quad (10)$$

Задание 10(11)-2. «Гравитационный диполь»

Принципиальное различие между поведением электрического и гравитационного диполя заключается в том, что силы, действующие на шарики гравитационного диполя направлены в одну сторону, а для электрического - в противоположные. Во всех частях задачи «просматривается» малый безразмерный параметр $\frac{l}{R}$, поэтому следует внимательно следить за правильным использованием приближенных формул.

3.1Э Модуль силы притяжения равен разности модулей сил, действующих на каждый из шариков. В свою очередь, эти силы определяются законом Кулона



$$F = F_1 - F_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\left(R - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\left(R + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2R}\right)^2} \right) =$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{l}{R} \frac{2}{\left(1 - \frac{l^2}{4R^2}\right)^2}$$

В данном выражении следует пренебречь слагаемыми второго порядка малости. Поэтому окончательная формула для силы притяжения диполя имеет вид

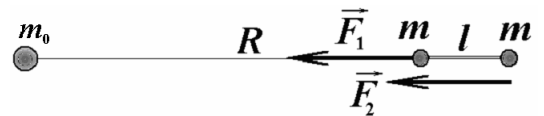
$$F = \frac{Qql}{2\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{2l}{R}. \quad (1)$$

Примечание. Этот результат может быть получен из известной формулы для силы, действующей на диполь,

$$F_x = p \frac{dE_x}{dx},$$

где $p = ql$ - дипольный момент диполя.

3.1Г Для гравитационного диполя модули сил необходимо просуммировать



$$F = F_1 + F_2 = G \frac{mm_0}{\left(R - \frac{l}{2}\right)^2} + G \frac{mm_0}{\left(R + \frac{l}{2}\right)^2} = G \frac{mm_0}{R^2} \frac{2\left(1 + \frac{l^2}{4R^2}\right)}{\left(1 - \frac{l^2}{4R^2}\right)^2}.$$

В этом выражении также следует пренебречь малыми величинами, поэтому суммарная сила, действующая на «гравитационный диполь» равна

$$F = G \frac{2mm_0}{R^2}. \quad (2)$$

Этот результат очевиден, так как при выполнении условия $R \gg l$, «диполь» может рассматриваться как материальная точка.

3.2Э При повороте диполя на малый угол α возникает момент сил, равный

$$M = (F_1 + F_2) \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

и возвращающий его в исходное состояние. Заметим, что в данном

выражении фигурирует сумма модулей сил, поэтому их можно считать одинаковыми и равными

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

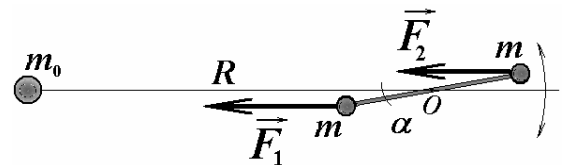
Так как колебания являются малыми, то можно считать, что $\sin \alpha \approx \alpha$. Для описания движения диполя можно использовать уравнение динамики вращательного движения (а можно использовать и другие подходы). Из этого уравнения следует уравнение гармонических колебаний

$$2m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \beta = - \frac{Qql}{4\pi\epsilon_0 R^2} \alpha \Rightarrow \beta = - \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 R^2 ml} \alpha, \quad (1)$$

из которого находим период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 R^2 ml}{Qq}}. \quad (2)$$

3.2Г В этом случае силы направлены в одну сторону, поэтому их моменты противоположны. Суммарный момент сил, возвращающий его в исходное состояние, определяется разностью модулей сил, поэтому является малой величиной



$$M = -(F_1 - F_2) \frac{l}{2} \sin \alpha = - \frac{Gmm_0}{R^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2R}\right)^2} \right) \frac{l}{2} \sin \alpha \approx - \frac{Gmm_0}{R^2} \cdot \frac{l}{R} \cdot l \alpha.$$

Соответствующее уравнение динамики вращательного движения, также является уравнением гармонических колебаний

$$2m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \beta = - \frac{Gmm_0 l^2}{R^3} \alpha \Rightarrow \beta = - \frac{2Gm_0}{R^3} \alpha.$$

Период малых колебаний в этом случае равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{2Gm_0}}. \quad (3)$$

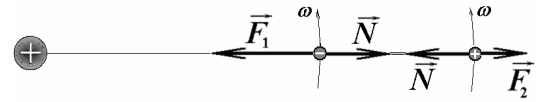
Интересно и неожиданно – этот период не зависит от физических характеристик диполя! У поверхности Земли ускорение свободного падения равно

$$g = G \frac{m_0}{R^2}.$$

Следовательно, период рассматриваемых колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{2Gm_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{2g}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{6,35 \cdot 10^6}{2 \cdot 9,8}} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 1 \text{ час}.$$

3.3Э Чтобы ось диполя была направлена все время на центр заряженного шара необходимо, чтобы оба шарика диполя вращались с одинаковыми угловыми скоростями. Почти очевидно, что стержень растянут, поэтому уравнения второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление, записываются в виде



$$m\omega^2 R \left(1 - \frac{l}{2R}\right) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2R}\right)^2} - N$$

$$m\omega^2 R \left(1 + \frac{l}{2R}\right) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2R}\right)^2} + N$$
(4)

Складывая эти уравнения, видим, что центростремительное ускорение является малой величиной первого порядка

$$2m\omega^2 R = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2R}\right)^2} \right) = \frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{l}{R}$$

Период вращения легко выразить через угловую скорость

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 R^4}{mQql}}$$
(5)

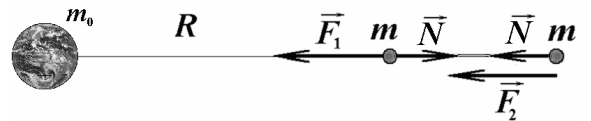
Сложим теперь уравнения системы (4) для расчета силы реакции стержня

$$2N = m\omega^2 l + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 \left(R + \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{l}{R}\right)^2 + \frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Видим, что сила натяжения стержня определяется кулоновскими силами (центробежные силы – малы)

$$N = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$
(6)

3.3Г В этом случае уравнения второго закона Ньютона должны быть записаны следующим образом



$$m\omega^2 R \left(1 - \frac{l}{2R}\right) = G \frac{mm_0}{R^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2R}\right)^2} - N$$

$$m\omega^2 R \left(1 + \frac{l}{2R}\right) = G \frac{mm_0}{R^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2R}\right)^2} + N$$
(7)

Для определения центростремительного ускорения и периода обращения сложим эти уравнения

$$2m\omega^2 R = G \frac{mm_0}{R^2} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2R}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2R}\right)^2} \right) = G \frac{mm_0}{R^2} \frac{2\left(1 + \frac{l^2}{4R^2}\right)}{\left(1 - \frac{l^2}{4R^2}\right)^2}. \quad (8)$$

Пренебрегая малыми величинами, находим период обращения

$$m\omega^2 R = G \frac{mm_0}{R^2} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{Gm_0}}, \quad (10)$$

который совпадает с периодом обращения материальной точки.

Для расчета силы натяжения стержня запишем разность уравнений (8):

$$2N = m\omega^2 l + G \frac{mm_0}{R^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2R}\right)^2} \right).$$

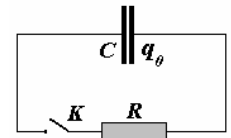
Из этого выражения следует, что и центробежные силы (с учетом (10)) и разность гравитационных сил имеют одинаковый первый порядок малости, поэтому должны быть учтены

$$N = \frac{1}{2} m\omega^2 R \frac{l}{R} + \frac{1}{2} G \frac{mm_0}{R^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2R}\right)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} G \frac{mm_0}{R^2} \frac{l}{R} + \frac{1}{2} G \frac{mm_0}{R^2} \frac{2l}{R} = \frac{3}{2} G \frac{mm_0}{R^2} \frac{l}{R}$$

Задание 10(11)-3. «Разрядка конденсатора»

1. Поскольку начальное напряжение на конденсаторе $U_0 = \frac{q_0}{C}$, то согласно закону Ома сразу после замыкания ключа K в цепи



$$\text{возникнет ток силой } I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{q_0}{RC}.$$

По мере разрядки конденсатора напряжение на нем, а следовательно и сила тока в цепи, будут монотонно убывать с течением времени.

Строгое математическое решение данной задачи приводит к неожиданному результату — полная разрядка конденсатора происходит «бесконечно долго», поскольку график временной зависимости заряда конденсатора $q(t)$ асимптотически стремится к нулю (см. рис).

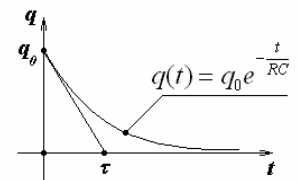
Для оценки времени разрядки конденсатора используем традиционный прием: будем считать, что сила тока в цепи

«сохраняет» свое максимальное значение $I_0 = \frac{q_0}{RC}$ в течение всего

времени разрядки конденсатора. В таком случае для полной разрядки конденсатора потребуется время

$$\tau = \frac{q_0}{I_0} = RC. \quad (1)$$

Графически данная оценка соответствует точке пересечения касательной к графику $q(t)$, проведенной в начальной точке, с осью абсцисс.



2. Если сила тока в цепи остается постоянной и равной I , то заряд конденсатора линейно убывает со временем по закону

$$q(t) = q_0 - I \cdot t.$$

Напряжение на конденсаторе, пропорциональное его мгновенному заряду $q(t)$, должно быть равно падению напряжения на резисторе, сопротивление которого меняется со временем (см. рис). Следовательно, в данном случае справедливо равенство

$$\frac{q(t)}{C} = \frac{q_0 - I \cdot t}{C} = I \cdot R(t) \Rightarrow R(t) = \frac{q_0 - I \cdot t}{IC}. \quad (2)$$

Согласно (2) для того, чтобы сила тока в цепи при разрядке конденсатора оставалась постоянной, сопротивление реостата нужно уменьшать со временем по линейному закону (см. рис).

Поскольку в начальный момент времени $I = \frac{q_0}{R_0 C}$, то искомую зависимость $R(t)$ можно представить в виде

$$R(t) = R_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right),$$

где $\tau = R_0 C$.

Как ни странно, но время τ полной разрядки конденсатора при постоянной силе тока ($\tau = \frac{q_0}{I}$) также равно

$$\tau = R_0 C.$$

Количество теплоты, выделившееся на резисторе за все время разрядки, согласно закону сохранения энергии равно начальной энергии конденсатора

$$Q = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Заметим, что этот же результат можно получить и иным способом – просуммировать и усреднить мощность тепловыделения Джоуля-Ленца.

3. При повороте одной из пластин на угол α относительно другой пластины площадь перекрытия пластин уменьшилась на величину площади сектора угловой величиной α (см. рис)

$$S = S_0 - \frac{\alpha r^2}{2} = S_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right).$$

Соответственно, емкость нового плоского конденсатора стала равной

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = C_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right). \quad (3)$$

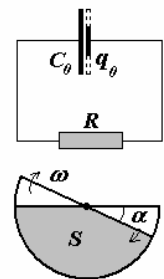
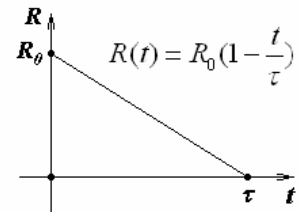
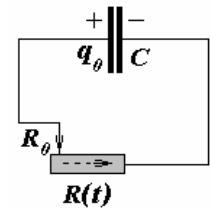
Опять же, если сила тока в цепи остается постоянной и равной I , то заряд конденсатора линейно убывает со временем по закону

$$q(t) = q_0 - I \cdot t.$$

В силу равенства мгновенных напряжений на резисторе и конденсаторе в любой момент времени можем записать

$$\frac{q(t)}{C(t)} = \frac{q_0 - I \cdot t}{C(t)} = I \cdot R \Rightarrow C(t) = \frac{q_0 - I \cdot t}{IR} \quad (4)$$

Согласно (4) для того, чтобы сила тока в данной цепи при повороте пластины оставалась постоянной, емкость конденсатора нужно уменьшать со временем по линейному



закону (см. график предыдущего пункта). Это значит, что вращать один из дисков нужно с постоянной угловой скоростью $\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{\pi}{\tau} = \frac{\pi}{RC_0}$.

Поскольку в начальный момент времени $I = \frac{q_0}{C_0 R}$, то равенство (3) можно переписать в виде

$$C(t) = C_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right), \quad (5)$$

где $\tau = RC_0$. При этом время разрядки конденсатора $\tau = \frac{q_0}{I}$ по-прежнему (уже можно сказать «традиционно») равно

$$\tau = RC_0.$$

Поскольку сила тока в цепи остается постоянной, то в данном случае выделится количество теплоты

$$Q = I^2 R \tau = \left(\frac{q_0}{C_0 R}\right)^2 R (RC_0) = \frac{q_0^2}{C_0}. \quad (6)$$

Как следует из (6) количество выделенной на резисторе теплоты в два раза превышает количество энергии, запасенной в конденсаторе. Это «противоречие» объясняется тем, что при повороте пластины внешние силы совершили над системой положительную работу $A_{\text{вн}} = \frac{q_0^2}{2C_0}$, что и привело к увеличению

энергии системы в конечном состоянии.

4. При увеличении расстояния x между пластинами (см. рис) электроемкость конденсатора уменьшается по закону

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{x} = \frac{\epsilon_0 S}{x_0} \cdot \frac{x_0}{x} = C_0 \cdot \frac{x_0}{x}.$$

Записывая условие равенства напряжений на резисторе и конденсаторе, получим

$$\frac{q(t)}{C(t)} = \frac{q_0 - I \cdot t}{C_0 x_0} \cdot x(t) = I \cdot R \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - \frac{t}{\tau}}. \quad (7)$$

При записи (7) опять же учтено, что $I = \frac{q_0}{C_0 R}$, $\tau = RC_0$.

Как следует из полученного равенства, в данном случае движение обкладки будет неравномерным, поскольку при $t \rightarrow \tau$ функция (7) неограниченно возрастает (см. рис).

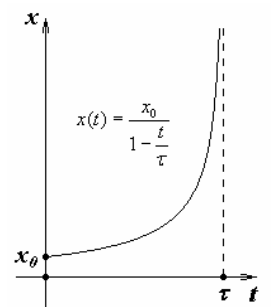
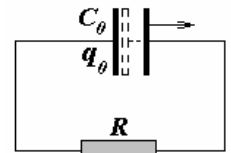
В данном случае конденсатор полностью разрядится при $x \rightarrow \infty$, что произойдет через конечное время, «неизменно» равное

$$t = \tau = RC_0.$$

Расчет выделившегося количества теплоты Q при раздвигании пластин полностью аналогичен предыдущему пункту

$$Q = \frac{q_0^2}{C_0}.$$

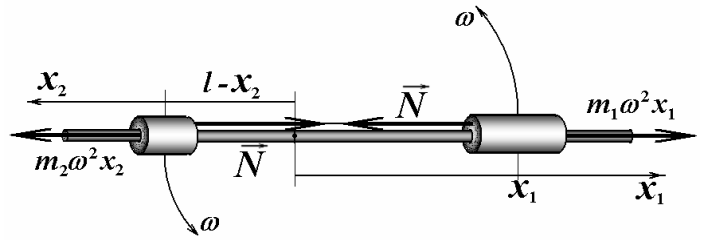
Внешние силы при этом опять же совершают работу против сил кулоновского притяжения пластин, что позволит выделиться на резисторе количеству теплоты, в два раза превышающему начальную энергию конденсатора.



Задание 11(11)-1. «Разминка»

1.1 Запишем уравнения динамики для каждого цилиндра в проекции на ось стержня (эта система не инерциальная)

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 \omega^2 x_1 - N \\ m_2 a_2 &= m_2 \omega^2 x_2 - N \end{aligned} \quad (1)$$



Так как длина нити не изменяется, то $x_2 = (l - x_1)$, поэтому можно записать

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 \omega^2 x_1 - N \\ -m_2 a_1 &= m_2 \omega^2 (l - x_1) - N \end{aligned}$$

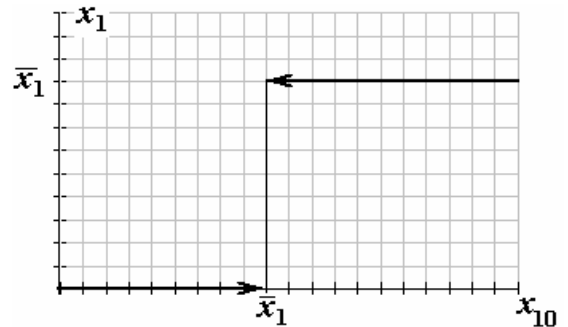
Вычитая из первого уравнения второе, получим уравнение, описывающее движение одного цилиндра

$$(m_1 + m_2) a_1 = (m_1 + m_2) \omega^2 x_1 - m_2 \omega^2 l. \quad (2)$$

Координата положения равновесия описывается формулой

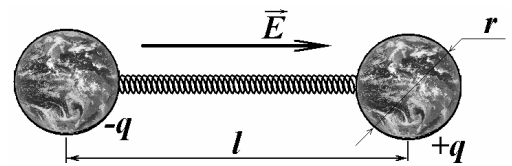
$$a_1 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l. \quad (3)$$

Не сложно показать, что это положение равновесия является неустойчивым: из уравнения (2) следует, что при $x_1 > \bar{x}_1$ ускорение этого цилиндра $a_1 > 0$, поэтому он будет смещаться дальше; и, наоборот, при $x_1 < \bar{x}_1$ ускорение $a_1 < 0$. Следовательно, при начальной координате меньшей координаты положения равновесия $x_{10} < \bar{x}_1$ этот цилиндр сместится к оси вращения, в противном случае к оси вращения сместится второй цилиндр. Следовательно, координата первого цилиндра станет равной длине нити. В том же случае, когда $x_{10} = x_1$ конечное положение цилиндра однозначно не определяется, оно зависит от направления случайного начального сдвига цилиндров. Данная зависимость-ступенька показана на рисунке.



1.2 При включении электрического поля на шариках индуцируются электрические заряды. Так как шарики и пружинка проводящие, то разность потенциалов между шариками должна быть равной нулю. Учитывая, что $l \gg r$, условие эквипотенциальности можно записать в виде

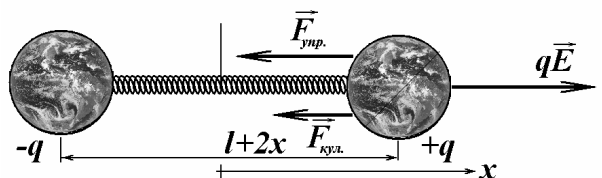
$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 r} = El. \quad (1)$$



Следовательно, величины зарядов равны

$$q = 2\pi\epsilon_0 r l E. \quad (2)$$

Взаимодействие этих зарядов с электрическим полем приведет к смещению шариков и деформации пружины. Пусть каждый шарик сместился на расстояние x относительно центра пружины. Тогда



уравнение второго закона Ньютона для шарика примет вид

$$ma = qE - 2kx - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(l+2x)^2}. \quad (3)$$

Подставляя значение зарядов (с учетом их зависимости от расстояния), получим уравнение

$$ma = 2\pi\epsilon_0 r(l+2x)E^2 - 2kx - \frac{(2\pi\epsilon_0 r(l+2x)E)^2}{4\pi\epsilon_0(l+2x)^2}.$$

Последним слагаемым можно пренебречь в виду малости r . Таким образом, приходим к уравнению движения шарика

$$ma = -(2k - 4\pi\epsilon_0 rE^2)x + 2\pi\epsilon_0 r l E^2. \quad (4)$$

Из этого уравнения следует, что колебания возможны, только при условии, что

$$k > 2\pi\epsilon_0 r E^2, \quad (5)$$

в противном случае, пружина не сможет сдержать силы электрического взаимодействия. При выполнении условия (5), уравнение (4) является уравнением гармонических колебаний, с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k - 4\pi\epsilon_0 r E^2}}. \quad (6)$$

Из уравнения (4) следует, что положению равновесия соответствует значение

$$x_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 r l E^2}{2k - 4\pi\epsilon_0 r E^2}. \quad (7)$$

Так как до включения поля $x = 0$, то формула (7) определяет и амплитуду колебаний каждого шарика.

1.3 В соответствии с законом Фика, скорость изменения числа молекул воздуха внутри пузыря описывается уравнением

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -D \frac{n - n_0}{h} S. \quad (1)$$

Величины, входящие в это уравнение, необходимо выразить через радиус пузыря. Разность давлений воздуха внутри и снаружи пузыря равна Лапласовскому давлению:

$$P - P_0 = \frac{4\sigma}{R}. \quad (2)$$

Разность соответствующих концентраций можно выразить из уравнения состояния

$$(n - n_0) = \frac{P - P_0}{kT} = \frac{4\sigma}{kTR}. \quad (3)$$

Для записи формулы для числа молекул внутри пузыря также необходимо использовать формулу Лапласа и уравнение состояния

$$N = nV = n \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{P}{kT} = \frac{4\pi R^3}{3kT} \left(P_0 + \frac{4\sigma}{R} \right). \quad (4)$$

Формула для площади поверхности хорошо известна:

$$S = 4\pi R^2. \quad (5)$$

Наконец, толщина пленки выражается из условия постоянства ее объема:

$$h \cdot 4\pi R^2 = h_0 \cdot 4\pi R_0^2 \Rightarrow h = h_0 \frac{R_0^2}{R^2}. \quad (6)$$

Собирая все формулы воедино, получим уравнение

$$\frac{1}{\Delta t} \Delta \left(\frac{4\pi R^3}{3kT} \left(P_0 + \frac{4\sigma}{R} \right) \right) = -D \frac{4\sigma}{kTR} \cdot \frac{R^2}{h_0 R_0^2} 4\pi R^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta(P_0 R^3 + 4\sigma R^2)}{\Delta t} = -\frac{4\sigma D}{h_0 R_0^2} R^3$$

Вычисление производной от сложной функции, приводит к окончательному выражению для скорости изменения радиуса пузыря:

$$(3P_0 R^2 + 8\sigma R) \frac{\Delta R}{\Delta t} = -\frac{4\sigma D}{h_0 R_0^2} R^3 \Rightarrow \frac{\Delta R}{\Delta t} = -\frac{4\sigma D}{h_0 R_0^2} \frac{R^3}{3P_0 R^2 + 8\sigma R}. \quad (7)$$

Отметим, что, если пренебречь лапласовским давлением, по сравнению с атмосферным давлением, то данная скорость пропорциональна радиусу пузыря, то есть радиус пузыря убывает экспоненциально.

Так как, по условию задачи изменения радиуса мало, то для вычисления времени уменьшения радиуса можно пренебречь изменением радиуса пузыря и положить его равным R_0 . Тогда искомое время определяется формулой

$$\Delta t = \Delta R \frac{h_0 R_0^2}{4\sigma D} \cdot \frac{3P_0 R_0^2 + 8\sigma R_0}{R_0^3} = \Delta R \frac{h_0 (3P_0 R_0 + 8\sigma)}{4\sigma D}. \quad (8)$$

Задание 11(11)-2. «Гальваномагнитные явления»

Считаем электрон положительно заряженной частицей.

1. Электрон движется с ускорением

$$a_x = \frac{eE_x}{m} \quad (1)$$

в течение времени τ . За это время электрон набирает направленную скорость

$$v = a_x \tau = \frac{eE_x}{m} \tau \quad (2).$$

Средняя скорость дрейфа

$$v_x = \frac{e\tau}{2m} E_x \quad (3).$$

Коэффициент $1/2$ не имеет принципиального значения.

2. Подставляя значение $\frac{F}{e} = E_x$ в формулу (3), получим:

$$\mu = \frac{e\tau}{2m} \quad (4).$$

3. Если электроны движутся вдоль поля с дрейфовой скоростью $v_x = \mu E_x$, то создаваемая этим направленным движением плотность тока:

$$j_x = nev_x = ne\mu E_x = \sigma_0 E_x \quad (5),$$

откуда

$$\sigma_0 = ne\mu \quad (6).$$

4. Движение электрона вдоль оси ОХ приведет к появлению силы Лоренца, действующей в отрицательном направлении оси ОУ. В свою очередь движение вдоль оси ОУ приведёт к появлению силы Лоренца, действующей в положительном направлении оси ОХ. (Заряд электрона положительный.) Следовательно:

$$\begin{cases} F_x = eE_x + ev_y B_z \\ F_y = eE_y - ev_x B_z \end{cases} \quad (7).$$

Результирующая сила приведет к появлению дрейфовой скорости, составляющие которой связаны аналогичными соотношениями:

$$\begin{cases} v_x = \mu(E_x + v_y B_z) \\ v_y = \mu(E_y - v_x B_z) \end{cases} \quad (8).$$

Из системы (8) выразим v_x и v_y .

$$\begin{cases} v_x = \frac{\mu(E_x + \mu E_y B_z)}{1 + \mu^2 B_z^2} \\ v_y = \frac{\mu(E_y - \mu E_x B_z)}{1 + \mu^2 B_z^2} \end{cases} \quad (9).$$

5. Если поле $E_y = 0$, то исходя из (9):

$$\begin{cases} v_x = \frac{\mu E_x}{1 + \mu^2 B_z^2} \\ v_y = \frac{-\mu^2 B_z E_x}{1 + \mu^2 B_z^2} \end{cases} \quad (10).$$

Если в отсутствие магнитного поля плотность тока:

$$j_x = nev_x = ne\mu E_x = \sigma_0 E_x \quad (11).$$

То теперь:

$$j_x = nev_x = \frac{ne\mu E_x}{1 + \mu^2 B_z^2} \approx ne\mu E_x (1 - \mu^2 B_z^2) = \sigma E_x \quad (12).$$

Следовательно, относительное изменение удельной проводимости:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{ne\mu - ne\mu(1 - \mu^2 B_z^2)}{ne\mu} = (\mu B_z)^2 \quad (13).$$

$$\gamma = 2 \quad (13a).$$

6. Т.к. угол $\alpha \ll 1$ (поле слабое), то:

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \mu B_z \quad (14).$$

7. Заряды перестанут накапливаться на границах, если $v_y = 0$. При этом, как следует из (9):

$$E_y = \mu B_z E_x \quad (15).$$

$$H = 1 \quad (16).$$

8. Подставив (15) в выражение для скорости v_x (9), получим:

$$v_x = \frac{\mu(E_x + \mu^2 B_z^2 E_x)}{1 + \mu^2 B_z^2} = \mu E_x \quad (17),$$

т.е. получается такое же значение, как и в отсутствие поля B_z . Магнетосопротивления нет.

9. Полный ток в случае двух типов электронов:

$$j_x = j_{1x} + j_{2x} = nev_{1x} + nev_{2x} = ne\mu E_x + ne \cdot 2\mu E_x = 3ne\mu E_x \quad (18).$$

$$\sigma_0 = 3ne\mu \quad (19).$$

10. Для каждого сорта электронов можно записать систему уравнений (8).

Для первого типа ($\mu_1 = \mu$):

$$\begin{cases} v_{1x} = \mu(E_x + v_{1y} B_z) \\ v_{1y} = \mu(E_y - v_{1x} B_z) \end{cases} \quad (20).$$

Для второго типа ($\mu_2 = 2\mu$):

$$\begin{cases} v_{2X} = 2\mu(E_X + v_{2Y}B_Z) \\ v_{2Y} = 2\mu(E_Y - v_{2X}B_Z) \end{cases} \quad (21).$$

Решая эти системы относительно скоростей, получим:

$$\begin{cases} v_{1X} = \frac{\mu(E_X + \mu E_Y B_Z)}{1 + \mu^2 B_Z^2} \\ v_{2Y} = \frac{\mu(E_Y - \mu E_X B_Z)}{1 + \mu^2 B_Z^2} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} v_{2X} = \frac{2\mu(E_X + 2\mu E_Y B_Z)}{1 + 4\mu^2 B_Z^2} \\ v_{2Y} = \frac{2\mu(E_Y - 2\mu E_X B_Z)}{1 + 4\mu^2 B_Z^2} \end{cases} \quad (23)$$

Ток вдоль оси ОУ прекратится, если (концентрации электронов каждого типа одинаковы):

$$v_{1Y} = -v_{2Y} \quad (24).$$

Т.е.:

$$\frac{\mu(E_Y - \mu E_X B_Z)}{1 + \mu^2 B_Z^2} = -\frac{2\mu(E_Y - 2\mu E_X B_Z)}{1 + 4\mu^2 B_Z^2} \quad (25).$$

Решая уравнение (25) относительно E_Y , получим:

$$E_Y = \frac{5}{3}\mu B_Z E_X \frac{1 + \frac{8}{5}\mu^2 B_Z^2}{1 + 2\mu^2 B_Z^2} \quad (26).$$

Используя формулу приближённого вычисления $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ преобразуем дробь в уравнении (26).

$$\frac{1 + \frac{8}{5}\mu^2 B_Z^2}{1 + 2\mu^2 B_Z^2} \approx \left(1 + \frac{8}{5}\mu^2 B_Z^2\right) \cdot (1 + 2\mu^2 B_Z^2)^{-1} \approx 1 - \frac{2}{5}\mu^2 B_Z^2 \quad (27).$$

Тогда:

$$E_Y = \frac{5}{3}\mu B_Z E_X - \frac{2}{3}\mu^3 B_Z^3 E_X \approx \frac{5}{3}\mu B_Z E_X \quad (28)$$

Можно пренебречь, слагаемым порядка $\mu^3 B_Z^3$:

$$H = \frac{5}{3} \quad (29).$$

11. Подставив (28) в выражения для v_{1X} (22) и v_{2X} (23), получим:

$$v_{1X} = \frac{\mu E_X \left(1 + \frac{5}{3}\mu^2 B_Z^2\right)}{1 + \mu^2 B_Z^2} \quad (30),$$

$$v_{2X} = \frac{2\mu E_X \left(1 + \frac{10}{3}\mu^2 B_Z^2\right)}{1 + 4\mu^2 B_Z^2} \quad (31).$$

Плотность тока:

$$j_X = ne(v_{1X} + v_{2X}) = ne\mu E_X \left(\frac{1 + \frac{5}{3}\mu^2 B_Z^2}{1 + \mu^2 B_Z^2} + \frac{2\left(1 + \frac{10}{3}\mu^2 B_Z^2\right)}{1 + 4\mu^2 B_Z^2} \right) \quad (32).$$

Используя формулу приближённого вычисления, упростим выражение, стоящее в скобках, сохраняя только величины порядка $\mu^2 B_z^2$.

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \frac{5}{3}\mu^2 B_z^2}{1 + \mu^2 B_z^2} + \frac{2\left(1 + \frac{10}{3}\mu^2 B_z^2\right)}{1 + 4\mu^2 B_z^2} = \\ & = \left(1 + \frac{5}{3}\mu^2 B_z^2\right) \cdot (1 - \mu^2 B_z^2) + 2 \cdot \left(1 + \frac{10}{3}\mu^2 B_z^2\right) \cdot (1 - 4\mu^2 B_z^2) = \\ & = 1 + \frac{2}{3}\mu^2 B_z^2 + 2\left(1 - \frac{2}{3}\mu^2 B_z^2\right) = 3\left(1 - \frac{2}{9}\mu^2 B_z^2\right) \end{aligned} \quad (33).$$

Тогда для плотности тока получим:

$$j_x = 3ne\mu E_x \left(1 - \frac{2}{9}\mu^2 B_z^2\right) \quad (34).$$

Относительное изменение удельной проводимости:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{2}{9}(\mu B_z)^2 \quad (35).$$

$$\delta = \frac{2}{9} \quad (36).$$

12. Менее подвижные электроны будут увлекаться полем E_y вдоль положительного направления оси ОУ. На более подвижные электроны влияние силы Лоренца будет сильнее, поэтому вдоль оси ОУ они будут двигаться в отрицательном направлении.

Для определения углов, подставим значение поля E_y (28) в (22) и (23). После некоторых преобразований получим:

$$\begin{cases} v_{1x} = \mu E_x \left(1 + \frac{2}{3}\mu^2 B_z^2\right) \\ v_{2y} = \frac{2}{3}\mu^2 B_z E_x \end{cases} \quad (37),$$

$$\begin{cases} v_{2x} = 2\mu E_x \left(1 - \frac{2}{3}\mu^2 B_z^2\right) \\ v_{2y} = -\frac{2}{3}\mu^2 B_z E_x \end{cases} \quad (38).$$

Пренебрегая величинами порядка $(\mu B_z)^3$, получим:

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} \approx \frac{2}{3}\mu B_z \quad (39).$$

$$\alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} \approx -\frac{1}{3}\mu B_z \quad (40).$$

Задание 11(11)-3. «Образование облаков»

Часть 1. Стационарная атмосфера.

1.1 Из формулы (1) следует, что

$$\Delta T = T_0 a \Delta z \quad (1)$$

Следовательно,

$$\Delta z = \frac{\Delta T}{T_0 a} \quad (2)$$

1.2 При подъеме на малую высоту Δz , давление уменьшается на величину

$$\Delta P = -\rho g \Delta z, \quad (3)$$

где ρ - плотность воздуха, зависящая от его давления и температуры. Эта зависимость выражается из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}. \quad (4)$$

Из уравнений (3)-(4) следует, что производная давления по высоте равна

$$\frac{\Delta P}{\Delta z} = -\rho g = -\frac{PM}{RT} g = -\frac{PMg}{RT_0(1-az)}. \quad (5)$$

С другой стороны, из формулы $P = P_0(1-az)^\alpha$ следует, что

$$P' = -\alpha a P_0(1-az)^{\alpha-1}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5) получим

$$-\alpha a P_0(1-az)^{\alpha-1} = -\frac{P_0(1-az)^\alpha Mg}{RT_0(1-az)} = -\frac{P_0 Mg}{RT_0}(1-az)^{\alpha-1}. \quad (6)$$

Из этого выражения следует, что формула (2), приведенная в условии, удовлетворяет уравнению (5), при

$$\alpha = \frac{Mg}{aRT_0}. \quad (7)$$

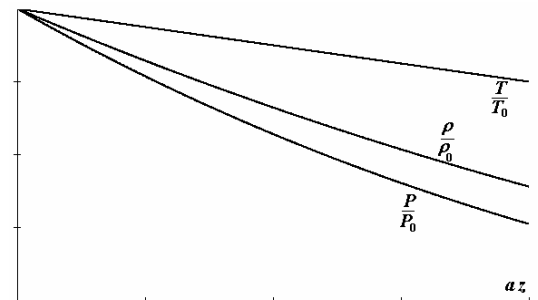
1.3 Формула, описывающая зависимость плотности от высоты следует из выражения (4) и найденной барометрической формулы

$$\rho(z) = \frac{PM}{RT} = \frac{MP_0(1-az)^\alpha}{RT_0(1-az)} = \frac{MP_0}{RT_0}(1-az)^{\alpha-1}. \quad (8)$$

Таким образом, показатель

$$\beta = \alpha - 1 = \frac{Mg}{aRT_0} - 1. \quad (9)$$

1.4 Схематические графики зависимостей температуры, давления и плотности от высоты показаны на рисунке. Важно отметить, что температура падает по линейному закону, давление убывает быстрее всего, а плотность занимает промежуточное значение.



Часть 2. Восходящие потоки.

2.1 Так как давление в поднимающейся порции воздуха следует считать равным давлению окружающего воздуха на любой высоте, то для определения зависимости ее температуры следует записать уравнение адиабатного процесса в «координатах» (T, P) . Из уравнения состояния

$$\frac{PV}{T} = const$$

выразим

$$V = const \cdot \frac{T}{P}$$

и подставим в уравнение адиабатного процесса:

$$P \frac{T^\gamma}{P^\gamma} = P^{1-\gamma} T^\gamma = const \Rightarrow TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const.$$

Константу в этом уравнении можно выразить из условий на поверхности земли

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (10)$$

Подставляя найденную зависимость давления от высоты, найдем зависимость температуры поднимающегося воздуха от высоты:

$$T_1(z) = T_0 \left(\frac{P_0}{P_0(1-az)^\alpha} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 (1-az)^{\frac{\gamma-1}{\gamma} \alpha}. \quad (11)$$

Таким образом, в этой формуле показатель степени равен

$$\delta = \frac{\gamma-1}{\gamma} \alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{aRT_0}. \quad (12)$$

2.2 Плотность воздуха выражается из уравнения состояния

$$\rho_1(z) = \frac{PM}{RT_1} = \frac{MP_0(1-az)^\alpha}{RT_0(1-az)^\delta} = \frac{MP_0}{RT_0} (1-az)^{\alpha-\delta}. \quad (13)$$

Показатель степени в этой формуле равен

$$\varepsilon = \alpha - \delta = \frac{Mg}{aRT_0} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{aRT_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{Mg}{aRT_0}. \quad (14)$$

2.3 Подъем воздуха будет продолжаться, если на любой высоте его плотность меньше, чем плотность окружающего воздуха

$$\rho_1(z) < \rho(z). \quad (15)$$

Это условие будет выполняться, если показатель степени в формуле (13) будет больше, чем в формуле (8), то есть при $\alpha - \delta > \alpha - 1$, или при $\delta < 1$. Используя найденное значение этого параметра (12), найдем требуемое значение параметра a :

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{aRT_0} < 1 \Rightarrow a > \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{RT_0} \approx 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}. \quad (16)$$

При этом значении параметра температура должна понижаться на один градус на высотах меньших, чем

$$\Delta z = \frac{\Delta T}{T_0 a} = \frac{1}{300 \cdot 3,3 \cdot 10^{-5}} \approx 100 \text{ м}. \quad (17)$$

Часть 3. Конденсация.

Для начала конденсации необходимо, чтобы температура поднимающегося воздуха стала равной температуре точки росы. Итак, пусть при температуре T_0 давление насыщенного пара равно $P_{нас.}(T_0)$, тогда парциальное давление водяных паров равно $\varphi P_{нас.}(T_0)$. Это давление есть давление насыщенных паров при температуре точки росы T_x :

$$\varphi P_{нас.}(T_0) = P_{нас.}(T_x). \quad (18)$$

Используя уравнение зависимости давления насыщенных паров от температуры, найдем температуру точки росы:

$$\ln \frac{P_{нас.}(T_x)}{P_{нас.}(T_0)} = \ln \frac{\varphi P_{нас.}(T_0)}{P_{нас.}(T_0)} = \ln \varphi = -\frac{qM_1}{R} \left(\frac{1}{T_x} - \frac{1}{T_0} \right) = -\frac{qM_1}{RT_0} \left(\frac{T_0}{T_x} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$T_x = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{qM_1} \ln \varphi}$$

Теперь подставим выражение для зависимости температуры поднимающегося воздуха от высоты $T_1(z)$

$$T_0(1 - az)^\delta = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{qM_1} \ln \varphi}. \quad (19)$$

Для решения этого уравнения оценим численно

$$-\frac{RT_0}{qM_1} \ln \varphi = -\frac{8,3 \cdot 300 \cdot \ln 0,7}{2,2 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-3}} \approx 0,0224,$$

Эта величина является малой (по сравнению с 1), поэтому малой является и величина az , поэтому уравнение (19) можно упростить:

$$T_0(1 - az)^\delta = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{qM_1} \ln \varphi} \Rightarrow 1 - \delta az = 1 + \frac{RT_0}{qM_1} \ln \varphi.$$

Наконец, используя выражение для показателя степени δ , получим выражение для высоты образования облаков

$$\delta az = -\frac{RT_0}{qM_1} \ln \varphi \Rightarrow \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Mg}{aRT_0} az = -\frac{RT_0}{qM_1} \ln \varphi \Rightarrow$$

$$z = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{(RT_0)^2}{qM_1 Mg} \ln \varphi = -\frac{1,4}{0,4} \frac{(8,3 \cdot 300)^2 \cdot \ln 0,7}{2,2 \cdot 10^6 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} \approx 0,69 \cdot 10^3 \text{ м}$$