



*Республиканская физическая
олимпиада 2011 год
(заключительный этап)*

Теоретический тур.

Решения задач



Задача 9-1. Пусковое устройство.

1. Из условия равновесия ракеты следует, что

$$m_0 g = 4F_{mp}, \quad (1)$$

где F_{mp} - сила трения между корпусом ракеты и упором держателя. Условие равновесия штанги выполняется при равенстве моментов сил трения (которая по модулю равна силе трения, действующей на корпус ракеты) и силы нормальной реакции N относительно оси вращения штанги

$$Nl_0 \sin \alpha = F_{mp} l_0 \cos \alpha. \quad (2)$$

При записи этого условия учтено, что моменты сил тяжести и реакции в оси равны нулю.

Сила трения покоя не может превышать значения

$$F_{mp} < \mu N \quad (3)$$

Выражая из уравнения (2) значение силы трения и подставляя его в неравенство (3), получим, что коэффициент трения должен удовлетворять условию $\mu > tg \alpha$. То есть минимальное значение коэффициента трения, при котором ракета будет находиться в покое равно

$$\mu_0 = tg \alpha. \quad (4)$$

Отметим, что это значение не зависит от массы ракеты.

2. При наличии противовесов условие равновесия штанги упора имеет вид

$$m_1 g l_1 \cos \alpha + N l_1 \sin \alpha = F_{mp} l_0 \cos \alpha. \quad (5)$$

Выразим из этого уравнения значение силы нормальной реакции

$$N = \frac{F_{mp} l_0 \cos \alpha - m_1 g l_1 \cos \alpha}{l_0 \sin \alpha} \quad (6)$$

и подставим его в неравенство (3)

$$F_{mp} < \mu \frac{F_{mp} l_0 \cos \alpha - m_1 g l_1 \cos \alpha}{l_0 \sin \alpha}. \quad (7)$$

Это выражение преобразуется к виду

$$F_{mp} l_0 (\mu \cos \alpha - \sin \alpha) > \mu m_1 g l_1 \cos \alpha \quad (8)$$

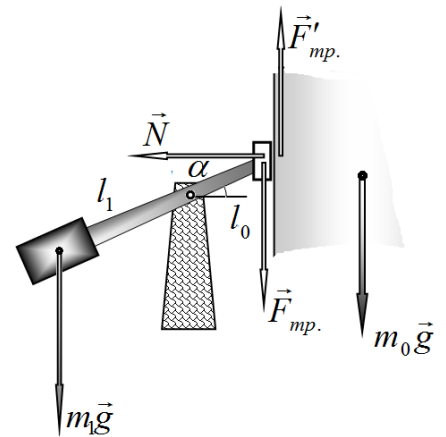
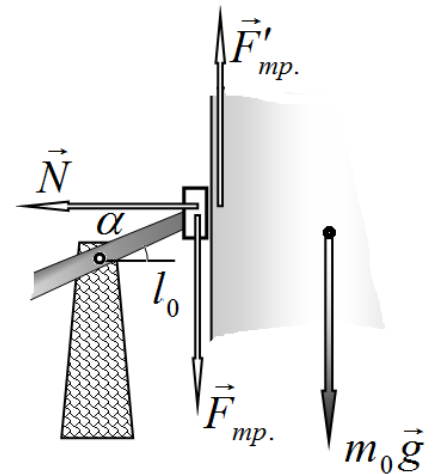
Из уравнения (1) выразим значение силы трения $F_{mp} = \frac{m_0 g}{4}$ и подставим его в неравенство (8), решая которое находим:

$$m < \frac{m_0 l_0}{4 l_1} \left(1 - \frac{tg \alpha}{\mu} \right). \quad (9)$$

Наконец, учитывая, что $\mu = 1,25 \mu_0 = 1,25 tg \alpha$, получим

$$m < \frac{m_0 l_0}{20 l_1}. \quad (10)$$

3. Когда силы тяги двигателей ракеты станет равной силе тяжести ракеты силы трения обратится в нуль. Следовательно, при наличии противовесов любой массы штанги начнут опрокидываться. То есть $F_{min} = m_0 g$.



Задача 2. Сканер-стробоскоп

Часть 1. Часы

Направление движения каретки сканера указано на рис.1. Секундная стрелка на часах движется «рывками», поэтому при сканировании изображение стрелки получается изломанным. Как видно из рисунка, за одну секунду каретка сканера перемещается на 30 мм, т. е. скорость каретки равна:

$$v_K = 30 \text{ мм} / \text{с} \quad (1)$$

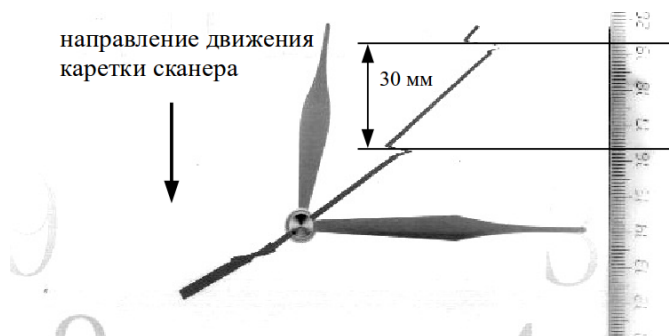


Рис. 1

Часть 2. Поступательное колебание стержня

График зависимости $x(t)$ представлен на рис.2. Период колебаний равен:

$$T = 4,1 \text{ с} / 3 = 1,37 \text{ с} \quad (2).$$

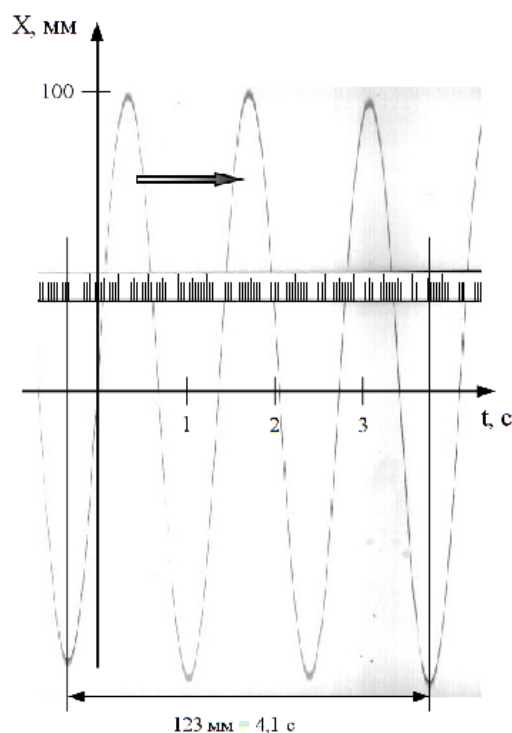


Рис. 2

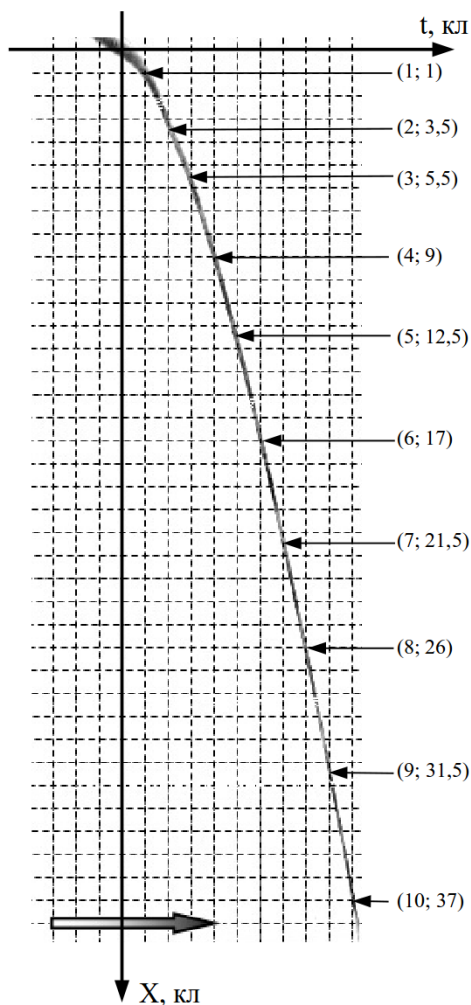


Рис.3

Часть 3. Скатывание стержня

Стержень движется вдоль оси X (рис.3). На рисунке приведены значения координаты стержня (в клетках) в различные моменты времени (тоже в клетках). Если движение равноускоренное, то $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, тогда $\frac{x}{t} = v_0 + \frac{a}{2}t$, т. е. зависимость $\frac{x}{t}(t)$ должна быть линейной.

На рис. 4 приведен график зависимости $\frac{x}{t}$.

Видим, что за исключением первых двух точек, зависимость линейная с наклоном $k = 0,26 \text{ кл}^{-1}$. Т. к. одна клетка равна 5 мм, а каретка сканера проходит расстояние в одну клетку за 1/6 секунды, то ускорение стержня равно:

$$a = 2k \frac{5 \text{ мм}}{(1/6 \text{ с})^2} = 94 \text{ мм/с}^2$$

(3).

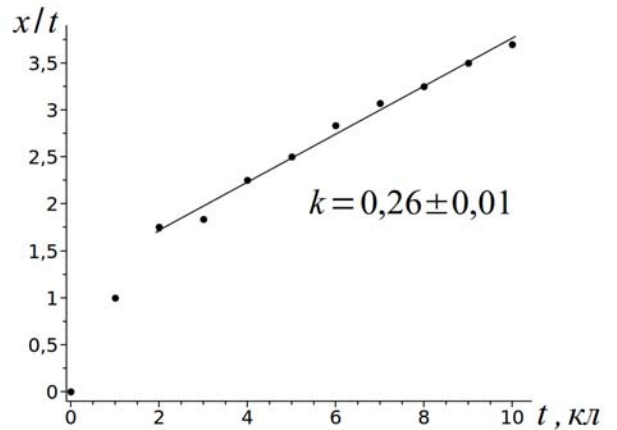


Рис. 4

Часть 4. Крутильные колебания стержня

Обозначенные на рис. 5 точки отсканированы в момент наибольшего отклонения стержня. Точки А, В и С в идеальном случае должны лежать на одной прямой, как и точки D, Е и F. Ось вращения совершает незначительные колебания в области, ограниченной прямыми АВ, АС, FD и FE. Из-за движения оси невозможно с большой точностью определить амплитуду колебания. На рисунке приведены значения двух углов. Амплитуда колебаний составляет:

$$\varphi_{\text{MAX}} = 40^\circ \pm 5^\circ \quad (4).$$

За время, в течение которого каретка проезжает 145 мм, стержень совершает 2,5 колебания, т. е. период колебаний равен:

$$T = \frac{145/30}{2,5} = 1,9 \text{ с} \quad (5).$$

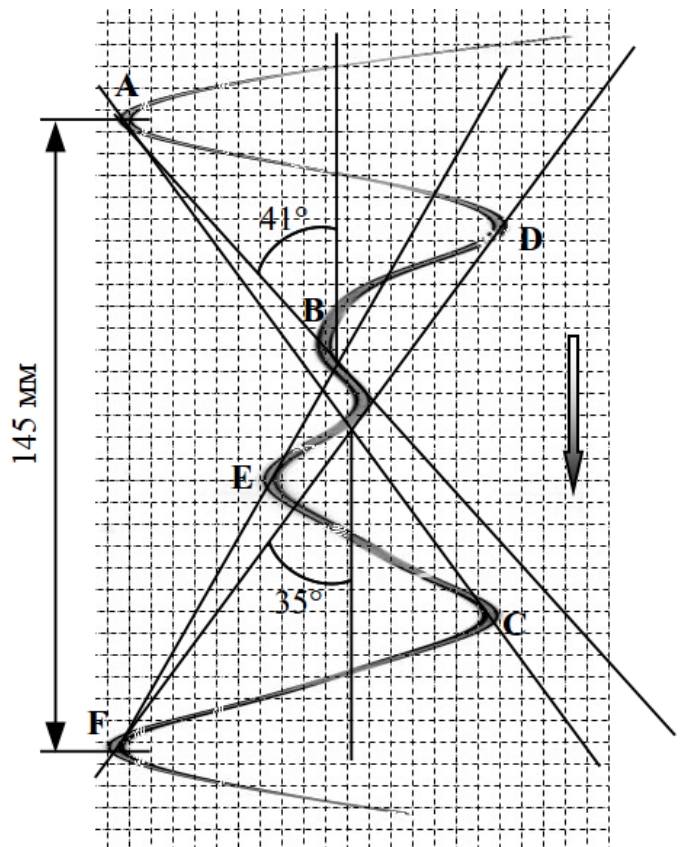


Рис. 5

Часть 5. Вращение стержня

Стержень вращается по часовой стрелке. Точки А, В, D, Е лежат на окружности (рис. 6). Перпендикуляры, восстановленные из середин хорд АВ и DE, пересекаются в центре окружности С. За время, в течение которого каретка проезжает 165 мм, стержень совершает 1,5 оборота. Средняя угловая скорость равна:

$$\omega_1 = 1,5 \frac{2\pi}{165/30} = 1,71 \text{ рад/с} \quad (6).$$

На рис. 7 представлена обработка фотографии стержня, вращающегося с большей угловой скоростью. Ось вращения определяется аналогично. Стержень совершает 3

оборота за время движения сканера от точки X до точки Y (175 мм). Угловая скорость вращения равна:

$$\omega_2 = 3 \frac{2\pi}{175/30} = 3,23 \text{ рад/с} \quad (7).$$

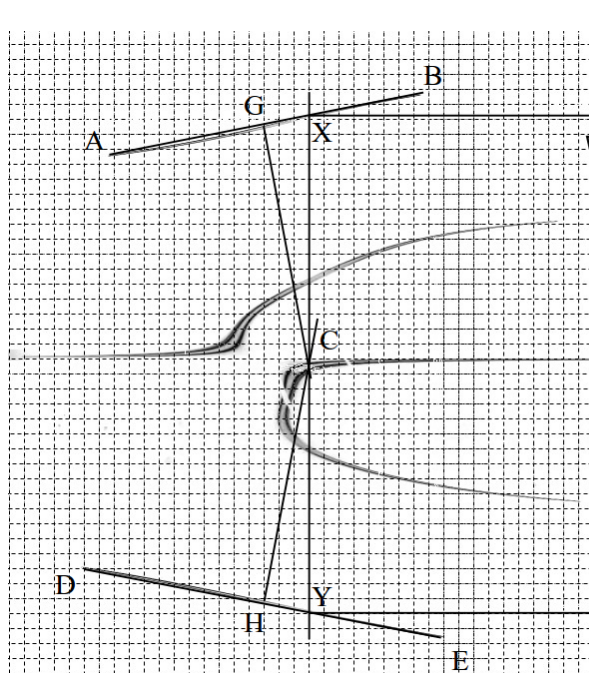


Рис. 6

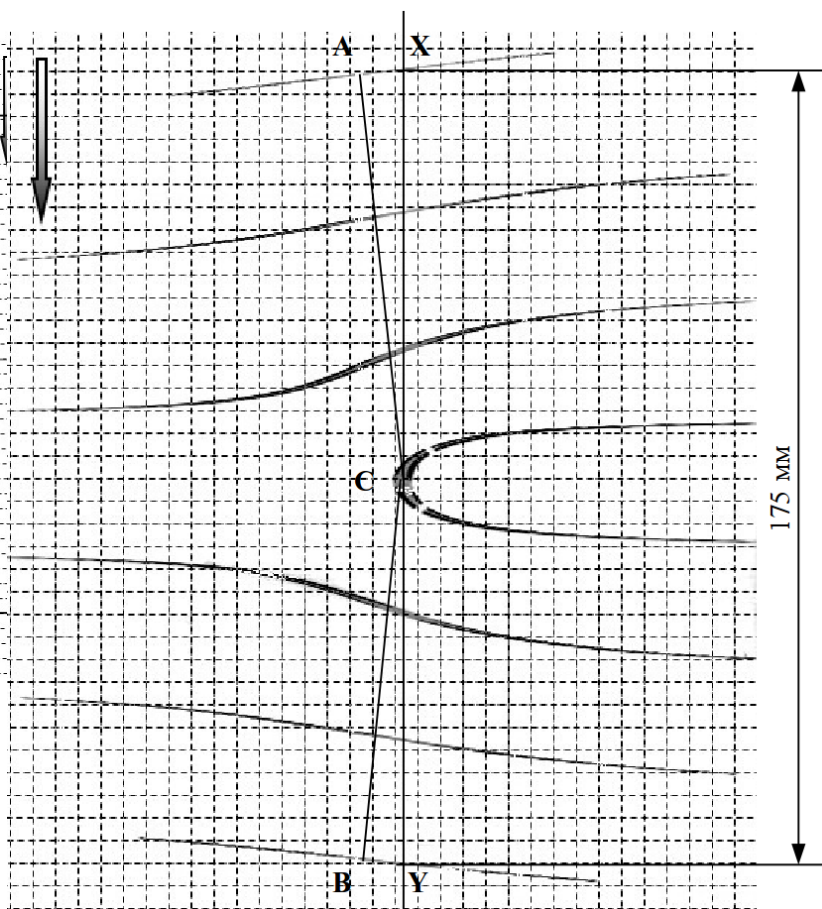


Рис. 7

Задача 9- 3. «Не забудьте посолить»

Часть 1. Фактор первый

1.1 Уравнение теплового баланса:

$$c_B m_B \Delta t = c_C m_C (t_K - \Delta t - t_C) \quad (1).$$

Откуда:

$$\Delta t = \frac{c_C m_C (t_K - t_C)}{c_B m_B + c_C m_C} \quad (2).$$

1.2 Согласно правилу смешения:

$$c(m_B + m_C) = c_B m_B + c_C m_C \quad (3).$$

Разделим обе части уравнения на $c_B + c_C$ и заметим, что $\frac{m_C}{m_B + m_C} = \eta$, а $\frac{m_B}{m_B + m_C} = 1 - \eta$.

Получим:

$$c = c_B (1 - \eta) + c_C \eta = c_B - (c_B - c_C) \eta \quad (4).$$

Таким образом, зависимость удельной теплоемкости раствора от концентрации является линейной с коэффициентом наклона $k = c_B - c_C$. График зависимости $c(\eta)$ представлен на рис. 1.

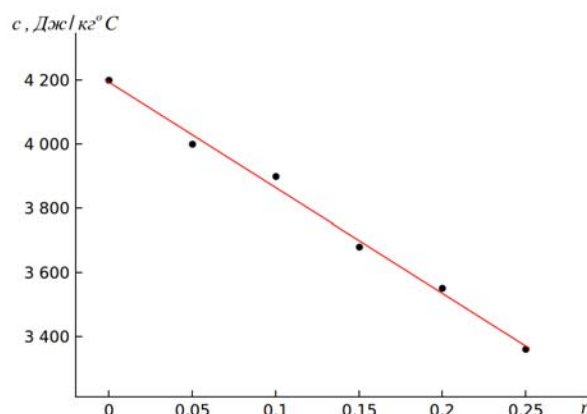


Рис. 1. График зависимости $c(\eta)$

Коэффициент $k = 3300 \text{ Дж} / \text{кг}^\circ \text{C}$, откуда $c_C = 900 \text{ Дж} / \text{кг}^\circ \text{C}$.

1.3 Изменение температуры воды в первом случае:

$$\Delta t_1 = 0,34^\circ \text{C} \quad (5),$$

во втором:

$$\Delta t_2 = 4,8^\circ \text{C} \quad (6).$$

Часть 2. Фактор второй

2.1 В таблице не приведены значения удельной теплоты растворения для $m_{C1} = 20\text{г}$ и $m_{C2} = 300\text{г}$. Получить необходимые значения можно проведя линейную интерполяцию, т. е. считая что на каждом интервале удельная теплота растворения изменяется линейно:

$$q = am_C + b \quad (7).$$

Для интервала (10;50), получим:

$$72,3 = 10a + b \quad (8),$$

$$66,2 = 50a + b$$

откуда: $a = -0,153 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{г}$, $b = 73,8 \text{ кДж} / \text{кг}$.

Для $m_{C1} = 20\text{г}$ получаем:

$$q_1 = 20a + b = 70,8 \text{ кДж} / \text{кг} \quad (9).$$

Для $m_{C2} = 300г$, интерполяция дает значение:

$$q_2 = 35.6 \text{кДж / кг} \quad (10).$$

На растворение соли требуется количество теплоты равное $q m_C$. Уравнение теплового баланса:

$$q m_C = (c_B m_B + c_C m_C) \Delta t \quad (11).$$

Откуда, для $m_{C1} = 20г$ получаем: $\Delta t_1 = 0,34^\circ C$

(12)

для $m_{C2} = 300г$: $\Delta t_2 = 1,5^\circ C$

(13)

Часть 3. Фактор третий

3.1 Концентрация раствора $\eta = \frac{m_C}{m_B + m_C} = \frac{1}{1 + \frac{m_C}{m_B}}$, откуда:

$$\frac{m_C}{m_B} = \frac{\eta}{1 - \eta} \quad (14).$$

Дополним таблицу колонками $\frac{m_C}{m_B}$ и Δt .

Таблица 3. Температуры кипения раствора соли

$\eta, \%$	$\frac{m_C}{m_B}$	$t_K, ^\circ C$	$\Delta t, ^\circ C$
0	0	100	0
5	0,053	100,5	0,5
10	0,11	101,0	1,0
15	0,18	101,6	1,6
20	0,25	102,2	2,2
25	0,33	102,9	2,9

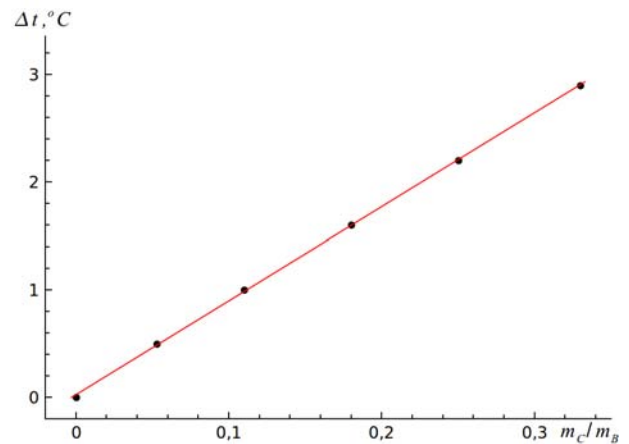


График зависимости $\Delta t \left(\frac{m_C}{m_B} \right)$ изображен на рис. 2.

Коэффициент $\alpha = 8,7^\circ C$.

3.2 Для $m_{C1} = 20г$ получаем: $\Delta t_1 = 0,17^\circ C$

(15),

для $m_{C2} = 300г$: $\Delta t_2 = 2,6^\circ C$

(16).

Часть 4. Когда же снова закипит?

4.1 Для оценки достаточно определить суммарный эффект.

Для $m_{C1} = 20г$ получаем:

$$\Delta t_{\text{СУММ1}} = 0,85^\circ \text{C} \quad (17),$$

поэтому вода закипит через время:

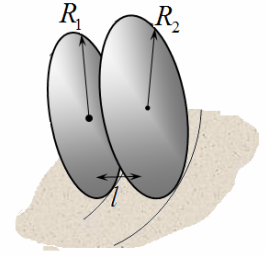
$$t_1 = \frac{300\text{с}}{80^\circ \text{C}} \cdot 0,85^\circ \text{C} \approx 3\text{с} \quad (18).$$

Для $m_{\text{C2}} = 300\text{г}$:

$$\Delta t_{\text{СУММ2}} = 8,9^\circ \text{C} \quad (19),$$

поэтому вода закипит через время:

$$t_1 = \frac{300\text{с}}{80^\circ \text{C}} \cdot 8,9^\circ \text{C} \approx 33\text{с} \quad (20).$$



Задача 10-1 «Такие разные колеса»

1. Если угловая скорость вращения игрушки при качении без проскальзывания равна ω , то линейные скорости вращения колес различны

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega R_1 \\ v_2 &= \omega R_2. \end{aligned}$$

Пусть радиус поворота игрушки R , тогда можем записать

$$v_1 = \Omega R$$

$$v_2 = \Omega(R+l),$$

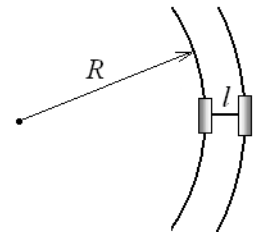
где Ω – угловая скорость вращения игрушки вокруг центра описываемой окружности.

Выражая отношения скоростей, находим

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R+l}{R}.$$

Из последнего равенства

$$R = \frac{R_1}{R_2 - R_1} l = 100\text{см} = 1,00\text{м}.$$



2. При повороте автомобиля справедливы равенства: для ближнего (к центру поворота) колеса

$$v = \Omega R = \omega_1 r,$$

для дальнего

$$v + \Delta v = \Omega(R+l) = \omega_2 r,$$

где Ω – угловая скорость вращения оси колеса вокруг центра описываемой окружности.

Из последнего равенства находим

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\Omega(R+l)}{r} - \frac{\Omega R}{r} = \Omega \frac{l}{r} = \frac{v}{R} \cdot \frac{l}{r}.$$

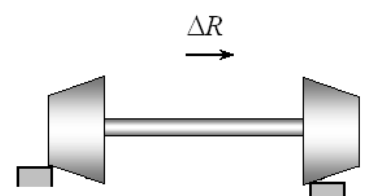
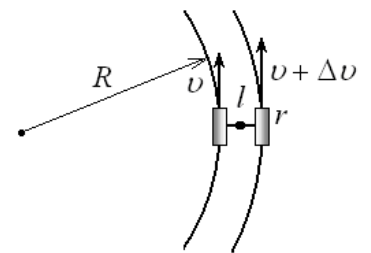
Расчет дает

$$\Delta\omega = 1,3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

3. Поскольку угловая скорость вращения колес поезда одинакова, то, используя результаты п.1 задачи получаем

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R+l}{R} = 1 + \frac{l}{R},$$

где R_1 и R_2 различные опорные радиусы колес после смещения колесной пары (в сторону от радиуса поворота).



При смещении колес на расстояние ΔR относительно симметричного положения отношение опорных радиусов станет равным

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(L + \Delta R) \operatorname{tg} \alpha}{(L - \Delta R) \operatorname{tg} \alpha} \approx 1 + 2 \frac{\Delta R}{L},$$

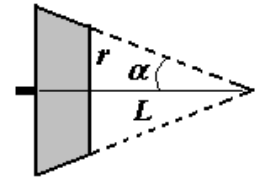
где L - расстояние до вершины соответствующего конуса. В нашем случае

$$L = \frac{r}{\alpha}.$$

Следовательно

$$\Delta R = \frac{r}{2\alpha} \cdot \frac{l}{R} = 3,4 \text{ мм}.$$

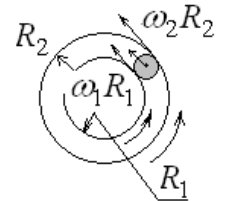
Как следует из полученного выражения, смещение колесной пары обратно пропорционально радиусу закругления железной дороги. Следовательно, для уменьшения величины смещения (реборда ограничивает), на железной дороге делают повороты с большим радиусом.



4. Поскольку проскальзывание малого цилиндра отсутствует, то его линейные скорости в точках касания должны быть равны соответствующим линейным скоростям цилиндров. При вращении в одном направлении имеем

$$\omega_2 R_2 = \omega r + \Omega \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$\omega_1 R_1 = \Omega \frac{R_1 + R_2}{2} - \omega r,$$



где $r = \frac{R_2 - R_1}{2}$ - радиус малого цилиндра.

Решая систему, получаем

$$\omega = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{2r} = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{R_2 - R_1} = 28 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Выражение для Ω :

$$\Omega = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{R_2 + R_1} = 6,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Направление вращения в данном случае будет совпадать с направлением вращения внешнего цилиндра.

При вращении в разных направлениях в одном из уравнений системы следует поменять знак:

$$\omega_2 R_2 = \Omega \frac{R_1 + R_2}{2} + \omega r$$

$$\omega_1 R_1 = \omega r - \Omega \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Решение в этом случае имеет вид

$$\omega = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{2r} = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{R_2 - R_1} = 1,4 \cdot 10^2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Искомая угловая скорость

$$\Omega = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{R_2 + R_1} = 1,3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Направление вращения в этом случае также будет совпадать с направлением вращения внешнего цилиндра.

Задача 10-2 Потенциал Леннард-Джонса.

Часть 1. Две молекулы

1.1 Сделав замену $x = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^6$, получим квадратичную зависимость:

$$y(x) = x^2 - x - E_0 / 4\varepsilon \quad (1)$$

Минимальное значение достигается при:

$$x_{min} = 1/2 \quad (2),$$

т. е. при:

$$r = \alpha \sqrt[6]{2} \quad (3)$$

и равно:

$$E_{min} = -\varepsilon \quad (4).$$

Энергия взаимодействия равна нулю при:

$$r = \alpha \quad (5).$$

1.2 График зависимости $E(r)$ представлен на рис. 1.

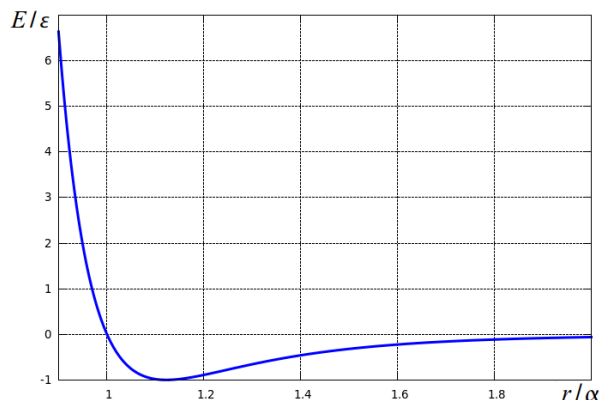


Рис. 1. График зависимости $E(r)$

Часть 2. Структура жидкости

2.1 Кубическая решетка изображена на рис. 2. Молекула, находящаяся внутри жидкости, имеет 6 «близких соседей», 12 «средних» и 8 «дальних». Всего 26 штук.

2.2 Молекула, находящаяся на поверхности жидкости, имеет 5 «близких соседей», 8 «средних» и 4 «дальних».

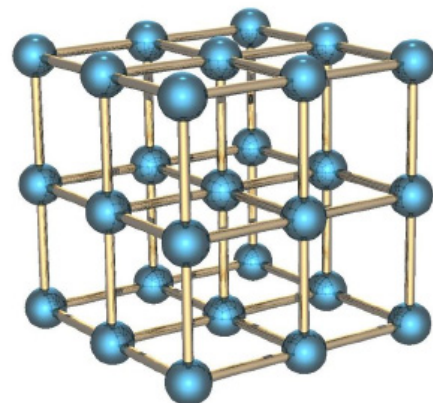


Рис. 2. Кубическая решетка

2.3 Потенциальная энергия взаимодействия молекулы со всеми соседями равна:

$$E_{BH} = 6 \cdot 4\varepsilon \left(\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{12} - \left(\frac{\alpha}{a}\right)^6 \right) + 12 \cdot 4\varepsilon \left(\left(\frac{\alpha}{a\sqrt{2}}\right)^{12} - \left(\frac{\alpha}{a\sqrt{2}}\right)^6 \right) + 8 \cdot 4\varepsilon \left(\left(\frac{\alpha}{a\sqrt{3}}\right)^{12} - \left(\frac{\alpha}{a\sqrt{3}}\right)^6 \right) \quad (6).$$

Сделав замену $x = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^6$ и приведя подобные слагаемые, получим:

$$y(x) = 6,2x^2 - 7,8x - E_{BH} / 4\varepsilon \quad (7)$$

Минимальное значение энергии реализуется при:

$$x_{min} = 0,629 \quad (8),$$

т. е. при:

$$a = \frac{\alpha}{\sqrt[6]{0,63}} \quad (9).$$

Минимальное значение энергии равно:

$$E_{BH} = -9,81\varepsilon \quad (10).$$

Часть 3. Свойства жидкости

3.1 В объеме V жидкости находится $N = V/a^3$ штук молекул. Их масса равна $m = \frac{N}{N_A} M$. Тогда плотность равна:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{a^3 N_A} = \frac{M\sqrt{0,629}}{a^3 N_A} \quad (11).$$

3.2 Молекула должна получить энергию равную (по модулю) энергии взаимодействия со своими «соседями» на поверхности жидкости (п. 2.2):

$$E_{\text{пов}} = 5 \cdot 4\varepsilon(x^2 - x) + 8 \cdot 4\varepsilon\left(\frac{x^2}{64} - \frac{x}{8}\right) + 4 \cdot 4\varepsilon\left(\frac{x^2}{729} - \frac{x}{27}\right) = 4\varepsilon(5,1x^2 - 6,1x) = -7,35\varepsilon \quad (12)$$

При испарении массы m необходимо разорвать $\frac{m}{M} N_A$ связей, т.е:

$$Lm = \frac{m}{M} N_A |E_{\text{пов}}| \quad (13),$$

откуда:

$$L = 7,35\varepsilon \frac{N_A}{M} \quad (14).$$

3.3 Для выхода молекулы на поверхность ей необходимо сообщить энергию равную:

$$E_{\text{вн-пов}} = |E_{\text{вн}} - E_{\text{пов}}| = 2,46\varepsilon \quad (15).$$

При образовании поверхности с площадью S , на нее выходит S/a^2 молекул, тогда:

$$\sigma S = \frac{S}{a^2} E_{\text{вн-пов}} \quad (16),$$

откуда

$$\sigma = \frac{2,46\varepsilon \sqrt[3]{0,629}}{a^2} \quad (17).$$

Часть 4. Вычислительная

4.1 Численные значения плотности, удельной теплоты парообразования и коэффициента поверхностного натяжения:

$$\rho = 728 \text{ кг} / \text{м}^3 \quad (18),$$

$$L = 199 \text{ кДж} / \text{кг} \quad (19),$$

$$\sigma = 0,0194 \text{ Н} / \text{м} \quad (20).$$

Табличные значения равны:

$$\rho = 800 \text{ кг} / \text{м}^3 \quad (21),$$

$$L = 200 \text{ кДж} / \text{кг} \quad (22),$$

$$\sigma = 0,011 \text{ Н} / \text{м} \quad (23).$$

Очень даже неплохо!

Задача 10- 3. Разминаясь, заряжаюсь.

1. Сила тока в цепи:

$$Ir = U_0 - U_C \quad (1),$$

где

U_C - разность потенциалов между пластинами конденсатора.

Сразу после замыкания ключа заряд на конденсаторе (и, соответственно, напряжение) равен нулю, а ток максимален и определяется внутренним сопротивлением источника:

$$U_C(0) = 0 \quad (2),$$

$$I(0) = U_0 / r \quad (3).$$

Когда конденсатор зарядится, разность потенциалов между пластинами станет равной ЭДС источника, а ток станет равным нулю.

$$U_C(\infty) = U_0 \quad (4),$$

$$I(\infty) = 0 \quad (5).$$

Качественные графики зависимости тока и напряжения от времени приведены на рис. 1.

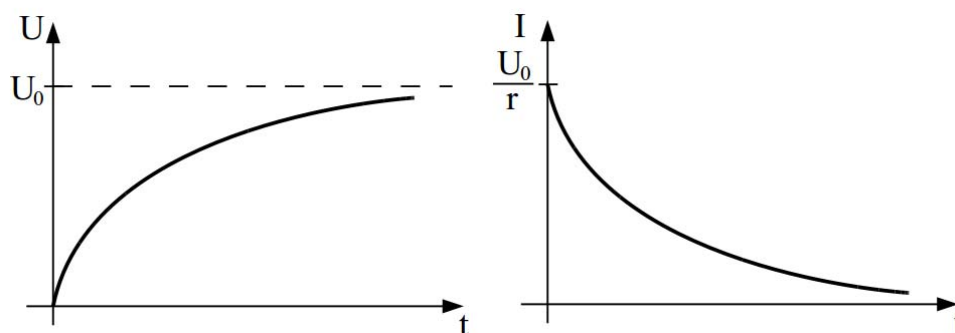


Рис. 1

Для проведения простых качественных рассуждений можно считать, что в начальный момент времени конденсатор ведет себя как резистор с очень малым сопротивлением, а в дальнейшем его сопротивление неограниченно возрастает.

2. Эквивалентная электрическая схема изображена на рис. 2.

В начальный момент времени сопротивление участка цепи, состоящего из параллельно включенных резистора и конденсатора, равно нулю. Поэтому разность потенциалов, регистрируемая вольтметром, равна нулю, а ток определяется внутренним сопротивлением источника:

$$U_C(0) = 0 \quad (6),$$

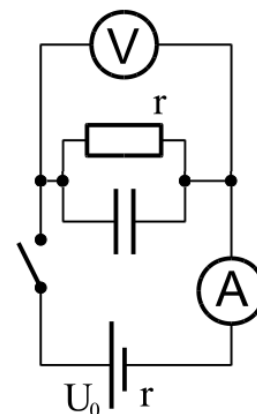
$$I(0) = U_0 / r \quad (7).$$

Через достаточно большой промежуток времени сопротивление участка цепи будет равно r , значит ток будет равен:

$$I(\infty) = U_0 / 2r \quad (8),$$

а напряжение:

$$U(\infty) = U_0 / 2 \quad (9)$$



Качественные графики зависимости тока и напряжения от времени приведены на рис. 3.

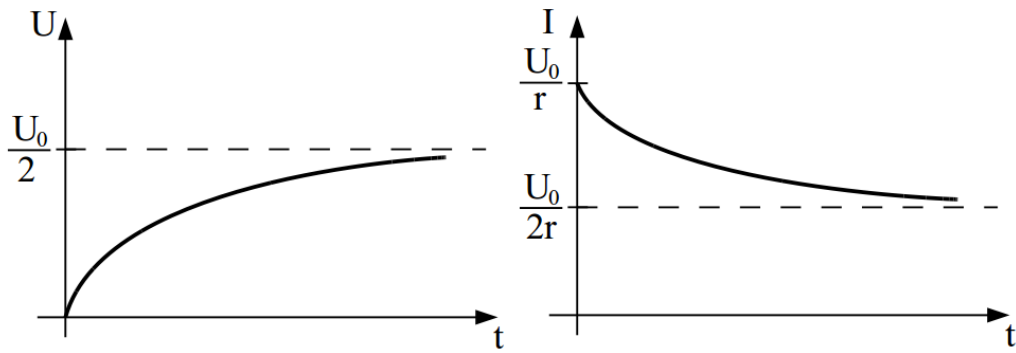


Рис. 3.

3. Эквивалентная электрическая схема изображена на рис. 4.

В начальный момент времени по-прежнему:

$$U_c(0) = 0 \quad (10),$$

$$I(0) = U_0 / r \quad (11).$$

Через длительный промежуток времени зарядится правый конденсатор, и ток в цепи прекратится, т. е.:

$$I(\infty) = 0 \quad (12),$$

а напряжение:

$$U(\infty) = 0 \quad (13).$$

Зависимость силы тока в цепи качественно не изменится и будет приблизительно такой же, как и на рис. 1. При построении зависимости напряжения на левом конденсаторе от времени следует учесть, что в течение определенного времени конденсатор будет заряжаться, однако позже весь заряд «стечет» по параллельно присоединенному резистору.

Качественный график зависимости напряжения, регистрируемого вольтметром, от времени представлен на рис. 5.

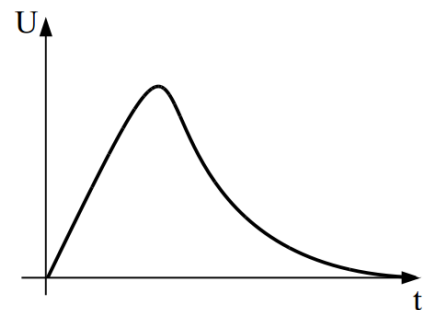
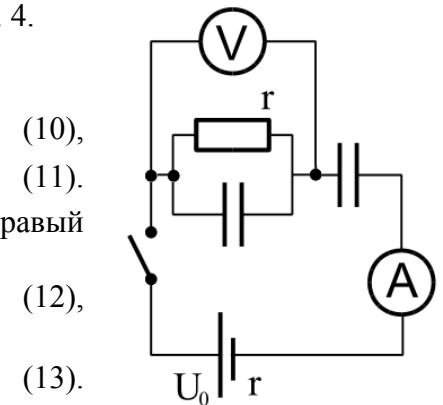


Рис. 5

4. Эквивалентная электрическая схема изображена на рис. 4. Как видно из рисунка, в цепь параллельно включены два конденсатора и резистор. Такое включение аналогично рассмотренному в п.2.

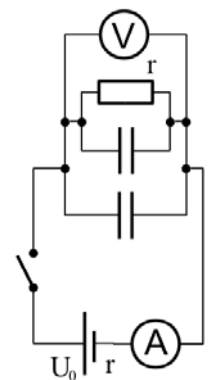


Рис. 6

Задача 11-1. «Радар-спидометр»

Часть 1. Импульсная локация.

1.1 Так как автомобили движутся равномерно, то законы их движения имеют вид

$$x_a(t) = x_0 + vt, \quad (1)$$

$$x_b(t) = ut. \quad (2)$$

1.2 Импульс номер k испущен в момент времени $t_k^{(0)} = k\tau$ в точке с координатой $x_k^{(0)} = uk\tau$.

Закон движения импульса до отражения имеет вид

$$x_1(t) = x_k^{(0)} + c(t - t_k^{(0)}) = uk\tau + c(t - k\tau) = ct - (c - u)k\tau. \quad (3)$$

В момент отражения координаты импульса и автомобиля равны $x_1(t) = x_a(t)$. Из этого условия находим время отражения

$$ct - (c - u)k\tau = x_0 + vt \Rightarrow t_k^{(1)} = \frac{x_0}{c - v} + \frac{c - u}{c - v}k\tau \quad (4)$$

И координату соответствующей точки

$$x_k^{(1)} = x_0 + vt_k^{(1)} = x_0 + v\left(\frac{x_0}{c - v} + \frac{c - u}{c - v}k\tau\right) = \frac{c}{c - v}x_0 + v\frac{c - u}{c - v}k\tau. \quad (5)$$

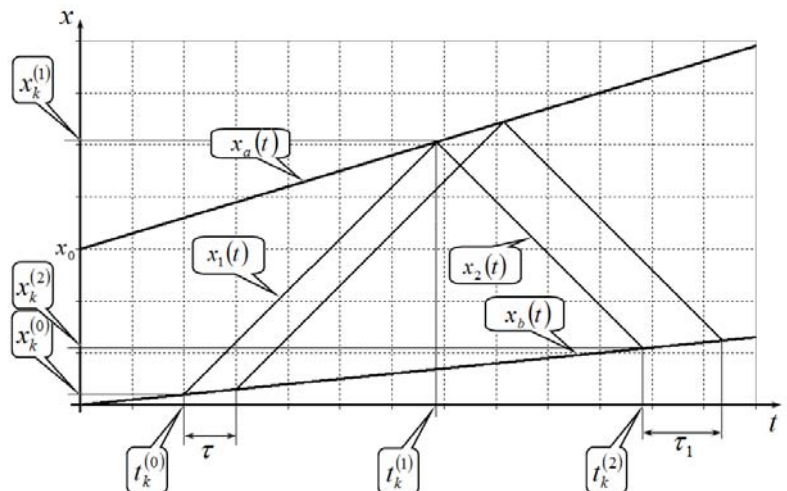
После отражения импульс движется в противоположном направлении по закону

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_k^{(1)} - c(t - t_k^{(1)}) = \frac{c}{c - v}x_0 + v\frac{c - u}{c - v}k\tau - c\left(t - \frac{x_0}{c - v} - \frac{c - u}{c - v}k\tau\right) \\ &= 2\frac{c}{c - v}x_0 + \frac{(c + v)(c - u)}{c - v}k\tau - ct \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения координаты первого автомобиля и момента времени, когда будет зарегистрирован отраженный сигнал, необходимо решить уравнение $x_2(t) = x_b(t)$:

$$\begin{aligned} 2\frac{c}{c - v}x_0 + \frac{(c + v)(c - u)}{c - v}k\tau - ct &= ut \Rightarrow \\ t_k^{(2)} &= 2\frac{c}{(c - v)(c + u)}x_0 + \frac{(c + v)(c - u)}{(c - v)(c + u)}k\tau, \\ x_k^{(2)} &= u\left(2\frac{c}{(c - v)(c + u)}x_0 + \frac{(c + v)(c - u)}{(c - v)(c + u)}k\tau\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Графики найденных законов движения автомобилей и импульсов показаны на рисунке.



1.3 Время между приходами двух последовательных импульсов

$$\tau_1 = t_{k+1}^{(2)} - t_k^{(2)} = \frac{(c+v)(c-u)}{(c-v)(c+u)} \tau \quad (8)$$

При $u, v \ll c$ выражение (8) упрощается

$$\tau_1 = \frac{(c+v)(c-u)}{(c-v)(c+u)} \tau \approx \left(1 + 2 \frac{v-u}{c}\right) \tau. \quad (9)$$

1.4 Относительное изменение интервала между импульсами равно

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = 2 \frac{v-u}{c} \quad (10)$$

Если разность скоростей составляет величину порядка 30м/с (т.е. около 100 км/час), то относительное изменение интервала составляет $2 \cdot 10^{-7}$, что, скорее всего, не может быть зарегистрировано.

Часть 2. Гармоническая локация.

2.1 За период одного колебания волна проходит расстояние, cT_0 , а автомобиль - uT_0 .

Разность между этими расстояниями и будет равна длине распространяющейся волны

$$\lambda_1 = cT_0 - uT_0 = (c-u) \frac{\lambda_0}{c}. \quad (11)$$

Время между отражениями двух максимумов волны от движущегося автомобиля можно рассчитать по формуле

$$T_1 = \frac{\lambda_1}{c-v} = \frac{c-u}{c-v} \frac{\lambda_0}{c} = \frac{c-u}{c-v} T_0. \quad (12)$$

Длина отраженной волны рассчитывается по формуле аналогичной формуле (11)

$$\lambda_2 = cT_0 + uT_0 = (c+u)T_1 = (c+v) \frac{c-u}{c-v} T_0. \quad (13)$$

2.2 По аналогии с формулой (12) запишем интервал между приемами максимумов отраженной волны движущимся локатором

$$T_2 = \frac{\lambda_2}{c+u} = \frac{c+v}{c+u} \cdot \frac{c-u}{c-v} T_0. \quad (14)$$

Следовательно, частота принятого сигнала равна

$$\nu_2 = \frac{c-v}{c-u} \cdot \frac{c+u}{c+v} \nu_0 \approx \left(1 - 2 \frac{v-u}{c}\right) \nu_0 \quad (15)$$

Относительное изменение частоты определяется по формуле

$$\frac{\nu_2 - \nu_0}{\nu_0} = -2 \frac{v-u}{c}, \quad (16)$$

Что совпадает с формулой (10), полученной в первой части.

Часть 3. Реальные измерения.

При сложении двух колебаний близких частот возникают биения, которые описываются функцией

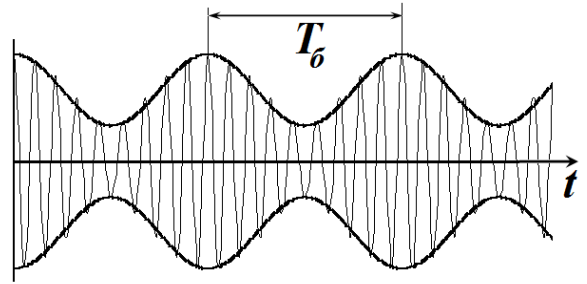
$$u(t) = u_0(t) + u_2(t) = A \cos \omega_0 t + A \cos \omega_2 t = 2A \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_2}{2} t\right), \quad (17)$$

Эта функция представляет собой произведение двух функций: быстроменяющейся со средней частотой и медленно меняющейся с частотой равной половине разности частот исходных колебаний.

Следовательно, можно считать, что медленно меняющаяся функция описывает изменение амплитуды колебаний

$$A_{\Sigma}(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_2}{2} t\right). \quad (18)$$

Схематический график результата сложения показан на рисунке.



Частота биений определяется по формуле

$$\omega_{\delta} = \left| \frac{\omega_0 - \omega_2}{2} \right| = \pi(v_0 - v_2) = 2\pi \frac{v-u}{c} v_0, \quad (19)$$

а их период равен

$$T_{\delta} = \frac{2\pi}{\omega_{\delta}} = \frac{c}{|v-u|} \frac{1}{v_0}. \quad (20)$$

3.2 Из формулы (20) следует, что относительная скорость движения автомобилей может быть рассчитана следующим образом

$$|v-u| = \frac{c}{v_0 T_{\delta}}. \quad (21)$$

Эта скорость не является мгновенной, так как для измерения периода биений должно пройти время, по крайней мере, равное этому периоду.

При указанных численных значениях параметров период биений равен

$$T_{\delta} = \frac{\lambda_0}{|v-u|} = \frac{0,20 \text{ м}}{100 \frac{10^3 \text{ м}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ с}}} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \text{ и может быть достаточно просто измерен.}$$

3.3 Относительное смещение автомобилей равно примерно равно длине волны посылаемого сигнала.

Задача 11- 2. Сферический баллон.

Часть 1. Деформация баллона.

Выделим на поверхности оболочки малую круглую площадку радиуса r , видимую из центра сферической оболочки под малым углом θ . Очевидно, что $r = R\theta$. Сила давления газа на эту площадку равна

$$F_p = \Delta p S_0 = \Delta p \cdot \pi r^2 = \Delta p \pi R^2 \theta^2 \quad (1)$$

(здесь $S_0 = \pi r^2 = \pi R^2 \theta^2$ - площадь выделенной площадки; Δp - разность давлений газов внутри и снаружи баллона) и направлена радиально от центра оболочки. Эта сила уравнивается силами упругости, возникающими в оболочке при ее деформации. Эти силы действуют по нормали к торцевому сечению выделенного участка, то есть по касательной к его поверхности. Сила упругости, действующая на малый элемент сечения ΔS_1 , равна

$$\Delta F_{упр.} = \varepsilon E \cdot \Delta S_{1i}, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta R}{R_0}$ - относительная деформация оболочки, одинаковая во всех ее точках.

Для вычисления векторной суммы всех сил упругости необходимо учесть, что они направлены под углом θ к радиальному направлению, следовательно, суммарная сила упругости будет направлена к центру сферы. Суммируя проекции сил упругости на радиальное направление, получим

$$F_{упр.} = \sum_i \Delta F_{упр.i} \cdot \theta = \varepsilon E \theta \sum_i \Delta S_{1i} = \varepsilon E \theta \cdot S_1, \quad (3)$$

где $S_1 = \sum_i \Delta S_{1i} = 2\pi r h = 2\pi R \theta h$ - площадь торцевой

поверхности выделенного элемента. Таким образом, с учетом выражения для относительной деформации, выражение для суммарной силы упругости приобретает вид

$$F_{упр.} = \varepsilon E \theta \cdot S_1 = \frac{\Delta R}{R_0} E \theta \cdot 2\pi R \theta h = 2\pi R h E \frac{\Delta R}{R_0} \cdot \theta^2 \quad (4)$$

Приравнивая эту силу к силе давления (1), получим уравнение

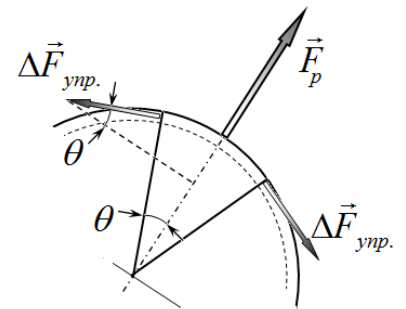
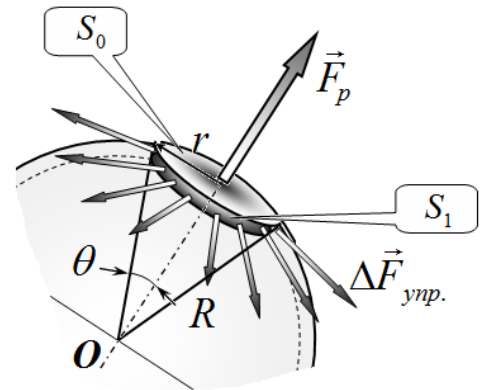
$$2\pi R h E \frac{\Delta R}{R_0} \cdot \theta^2 = \Delta p \pi R^2 \theta^2 \Rightarrow \frac{2Eh}{R_0 + \Delta R} \frac{\Delta R}{R_0} = \Delta p \quad (5)$$

Это уравнение может быть решено точно. Однако следует надеяться, что его деформация мала, поэтому можно решать приближенным, но более простым способом. Для этого еще раз перепишем уравнение в виде

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R_0 \Delta p}{2Eh} \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0} \right) \quad (6)$$

И оценим входящий в него безразмерный параметр (которому можно приписать даже определенный физический смысл):

$$\beta = \frac{R_0 \Delta p}{2Eh} = \frac{1,0 \cdot 1,0 \cdot 10^6}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}} \approx 2,4 \cdot 10^{-3}. \quad (7)$$



Этот параметр действительно много меньше единицы, поэтому уравнение (6) имеет решение

$$\varepsilon = \beta(1 + \varepsilon) \approx \beta \Rightarrow \Delta R = \beta R_0 \approx 2,4 \text{ мм}. \quad (8)$$

Отметим, что погрешность решения имеет порядок $\beta^2 \approx 5 \cdot 10^{-6}$. Решать с такой точностью не позволяют заданные точности исходных данных.

1.2 Баллон разорвется, если механическое напряжение его стенок превысит предел прочности σ_{np} . На пределе прочности сила результирующая сила упругости, действующая на выделенную площадку (как п.1.1) определяется формулой

$$F_{упр.} = \sigma_{np} \cdot \theta \cdot S_1 = 2\pi Rh\sigma_{np} \cdot \theta^2. \quad (9)$$

Приравнивая ее к силе давления газа (1), получим уравнения для определения избыточного давления, решение которого дает требуемый результат

$$\begin{aligned} \Delta p \pi R^2 \theta^2 &= 2\pi Rh\sigma_{np} \cdot \theta^2 \Rightarrow \\ \Delta p_{\max} &= \frac{2\sigma_{np} \cdot h}{R} \approx \frac{2\sigma_{np} \cdot h}{R_0} \approx \frac{2 \cdot 5,6 \cdot 10^8 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}}{1,0} \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ Па}. \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, максимальное давление в баллоне на одну атмосферу больше: $p_{\max} \approx 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Массу газа в баллоне определяем из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M} R_g T \Rightarrow m = \frac{PVM}{R_g T} = \frac{1,2 \cdot 10^6 \frac{4}{3} \pi (1,0)^3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 293} \approx 2,0 \text{ кг}. \quad (11)$$

Часть 2.

Наиболее простой способ определения частоты колебаний состоит в использовании закона сохранения энергии. Можно показать, что плотность энергии упругих деформаций определяется по формуле $w = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$. Тогда для колеблющейся оболочки закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} E \varepsilon^2 V = const. \quad (12)$$

где V - объем оболочки (а не баллона). Учитывая, что $\varepsilon = \frac{\Delta R}{R_0}$, а $v = \frac{\Delta R}{\Delta t}$, запишем

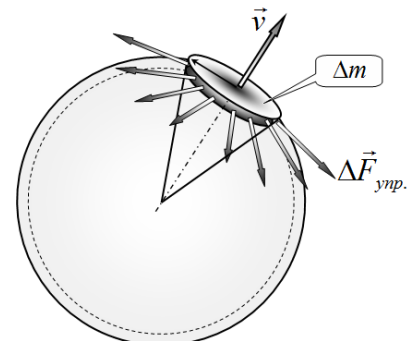
$$\frac{\rho V v^2}{2} + \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta R}{R_0} \right)^2 V = const \Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{E}{\rho R_0^2} (\Delta R)^2 = const. \quad (13)$$

А это есть уравнение гармонических колебаний с частотой, равной

$$\omega_0^2 = \frac{E}{\rho R_0^2} \Rightarrow \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho R_0^2}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}}{7,9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} 1,0 \text{ м}^2}} \approx 8,0 \cdot 10^2 \text{ Гц}. \quad (14)$$

Возможен и более традиционный путь решения – на основании уравнения второго закона Ньютона, записанного для малого выделенного элемента участка оболочки.

$$\Delta m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -F_{упр.} \quad (15)$$



Масса выделенного элемента равна

$$\Delta m = 2\pi R_0^2 \theta^2 h \rho \quad (16)$$

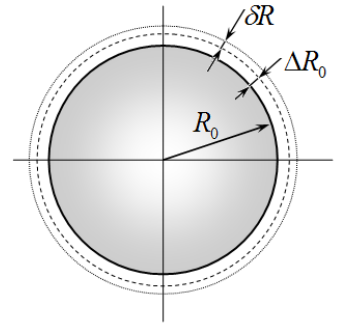
Подставляя полученное ранее выражение для силы упругости (4), получим

$$2\pi R_0^2 \theta^2 h \rho \frac{\Delta v}{\Delta t} = -2\pi R h E \frac{\Delta R}{R_0} \cdot \theta^2 \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{E}{\rho R_0^2} \Delta R \quad (15)$$

Полученное уравнение также является уравнением гармонических колебаний с частотой, определяемой формулой (14).

Заметим, что использование уравнения типа (15) предполагает пренебрежение всеми членами, имеющими второй порядок малости по смещению выделенного элемента.

2.2 Заполнение баллона газом изменяет частоту радиальных колебаний по двум причинам: первое – изменяется радиус баллона; второе – на стенки баллона действует дополнительная изменяющаяся сила давления газа¹. Чтобы учесть оба этих фактора представим изменение радиуса баллона в виде двух слагаемых: ΔR_0 - изменение радиуса баллона под действием давления газа в состоянии равновесия и определяемое формулой (8); δR - еще более малое отклонение от равновесного значения, возникающее в ходе колебаний.



Итак, уравнение второго закона Ньютона для выделенного элемента оболочки в данном случае приобретает вид

$$2\pi R_0^2 \theta^2 h \rho \frac{\Delta v}{\Delta t} = -2\pi R h E \frac{\Delta R}{R_0} \cdot \theta^2 + p \cdot \pi R^2 \theta^2 \quad (16)$$

Здесь p - изменяющееся давление газа в баллоне. Его зависимость от радиуса баллона определяется уравнением адиабатного процесса

$$p_0 V_0^\gamma = p V^\gamma \Rightarrow p = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{R_0 + \Delta R_0}{R_0 + \Delta R_0 + \delta R} \right)^{3\gamma} \quad (17)$$

Подставим это выражение в уравнение (16) и после сокращений получим

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{E}{R_0^2 \rho} (R_0 + \Delta R_0 + \delta R) \frac{\Delta R_0 + \delta R}{R_0} + \frac{p_0}{2R_0^2 h \rho} \left(\frac{R_0 + \Delta R_0}{R_0 + \Delta R_0 + \delta R} \right)^{3\gamma} (R_0 + \Delta R_0 + \delta R)^2 \quad (18)$$

Прежде всего, в этом уравнении необходимо провести разложения по «самой величине» δR , оставляя только величины первого порядка. Приведем эти выкладки подробно

$$\begin{aligned} (R_0 + \Delta R_0 + \delta R) \frac{\Delta R_0 + \delta R}{R_0} &= (R_0 + \Delta R_0) \frac{\Delta R_0}{R_0} + \delta R \left(\frac{\Delta R_0 + R_0 + \Delta R_0}{R_0} \right) = \\ &= (R_0 + \Delta R_0) \frac{\Delta R_0}{R_0} + \delta R \left(1 + 2 \frac{\Delta R_0}{R_0} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_0 + \Delta R_0}{R_0 + \Delta R_0 + \delta R} \right)^{3\gamma} (R_0 + \Delta R_0 + \delta R)^2 &= (R_0 + \Delta R_0)^2 \left(1 + \frac{\delta R}{R_0 + \Delta R_0} \right)^{2-3\gamma} \approx \\ &\approx (R_0 + \Delta R_0)^2 \left(1 - (3\gamma - 2) \frac{\delta R}{R_0 + \Delta R_0} \right) \approx (R_0 + \Delta R_0)^2 - (3\gamma - 2)(R_0 + \Delta R_0) \delta R \end{aligned} \quad (19)$$

¹ Строго говоря, при расчете колебаний стенок необходимо учитывать распространение упругих волн в газе внутри баллона (звуковые волны). Однако, мы упростим ситуацию и будем считать, что давление во всем объеме изменяется мгновенно во всех точках (так, называемое квазистационарное приближение).

Подстановка полученных выражений в уравнение (18) дает

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \left(-\frac{E}{R_0^2 \rho} (R_0 + \Delta R_0) \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{p_0}{2R_0^2 h \rho} (R_0 + \Delta R_0)^2 \right) - \left(\frac{E}{R_0^2 \rho} \left(1 + 2 \frac{\Delta R_0}{R_0} \right) + \frac{p_0}{2R_0^2 h \rho} (3\gamma - 2)(R_0 + \Delta R_0) \right) \delta R \quad (20)$$

Первое слагаемое в этом уравнении определяет условие равновесия

$$-\frac{E}{R_0^2 \rho} (R_0 + \Delta R_0) \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{p_0}{2R_0^2 h \rho} (R_0 + \Delta R_0)^2 = 0 \quad (21)$$

Заметим, что это уравнение было решено ранее – равновесное значение увеличения радиуса баллона дается формулой (8). Коэффициент при втором δR равен квадрату круговой частоты колебаний баллона. Преобразуем его, оставляя только величины первого порядка малости теперь по ΔR

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E}{R_0^2 \rho} \left(1 + 2 \frac{\Delta R_0}{R_0} \right) + \frac{p_0}{2R_0^2 h \rho} (3\gamma - 2)(R_0 + \Delta R_0) \right) = \\ & = \frac{E}{R_0^2 \rho} \left(1 + 2 \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{p_0 R_0}{2Eh} (3\gamma - 2) \left(1 + \frac{\Delta R_0}{R_0} \right) \right) = \\ & = \omega_0^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta R_0}{R_0} + \beta(3\gamma - 2) \left(1 + \frac{\Delta R_0}{R_0} \right) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\beta = \frac{R_0 \Delta p}{2Eh} \approx 2,4 \cdot 10^{-3}$ введенный и рассчитанный ранее параметр. Учитывая, что

относительная деформация баллона в состоянии равновесия также равна β в выражении (7) можно пренебречь малыми величинами второго порядка:

$$\omega_0^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta R_0}{R_0} + \beta(3\gamma - 2) \left(1 + \frac{\Delta R_0}{R_0} \right) \right) \approx \omega_0^2 (1 + 2\beta + \beta(3\gamma - 2)) = \omega_0^2 (1 + 3\gamma\beta) \quad (23)$$

Таким образом, частота колебаний и ее относительное изменение оказываются равными $\nu = \nu_0 \sqrt{1 + 3\gamma\beta} \approx \nu_0 \left(1 + \frac{3\gamma}{2} \beta \right) \Rightarrow \frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx \frac{3\gamma}{2} \beta \approx 5 \cdot 10^{-3}$, то есть всего 0,5%.

Часть 3. Электрический заряд.

3.1 На малую площадку ΔS на поверхности внешней сферы со стороны остальных зарядов сферы действует сила

$$\Delta F = E' \sigma \Delta S, \quad (24)$$

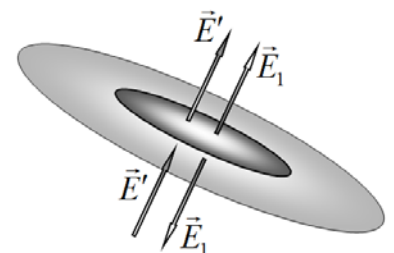
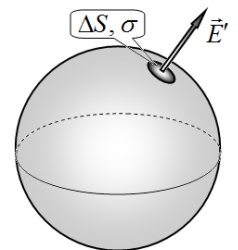
где σ - поверхностная плотность зарядов на сфере, E' - напряженность электрического поля, создаваемого всеми зарядами сферы, кроме тех, которые находятся на выделенной площадке.

Для определения напряженности поля E' воспользуемся следующими рассуждениями. Суммарное поле с внешней стороны площадки равно (поле равномерно заряженной сферы)

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (25)$$

и может быть представлено в виде двух слагаемых

$\vec{E}_0 = \vec{E}' + \vec{E}_1$, (\vec{E}_1 - напряженность поля, создаваемого зарядами на выделенной площадке). С внутренне стороны



под площадкой эти векторы направлены противоположно и их сумма равна нулю (так как поле внутри проводника отсутствует). Откуда следует, что искомая напряженность E' в два раза меньше суммарной напряженности поля у поверхности сферы

$$\vec{E}' - \vec{E}_1 = \vec{0} \Rightarrow E' = E_1 = \frac{1}{2} E_0 \quad (24)$$

Записанные выражения позволяют рассчитать давление электрического поля на поверхность сферы

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = E' \sigma = \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4} \quad (25)$$

Далее можно воспользоваться уравнением (10), заменив в нем давление газа на найденное давление электрического поля:

$$\frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R_0^4} = \frac{2\sigma_{np} \cdot h}{R_0} \quad (26)$$

Теперь без труда находим максимально возможный заряд сферы

$$\begin{aligned} q_{\max} &= \sqrt{64\pi^2 \epsilon_0 R_0^3 \sigma_{np} \cdot h} = 8\pi R_0 \sqrt{\epsilon_0 \sigma_{np} \cdot R_0 h} \approx \\ &\approx 8\pi \cdot 1,0^2 \sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5,6 \cdot 10^8 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}} \approx 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ Кл} \end{aligned} \quad (27)$$

Часть 4. Рентгеновское освещение.

Причиной возможного увеличения радиуса шара является фотоэффект, в результате которого шар приобретает положительный электрический заряд.

4.1 Энергия гамма-кванта рассчитывается по формуле

$$w = \frac{hc}{\lambda e} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3,0 \cdot 10^8}{2,0 \cdot 10^{-10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 6,2 \cdot 10^3 \text{ Эв} . \quad (28)$$

4.2 Энергия кванта значительно превышает работу выхода, поэтому последняя может быть опущена в уравнении Эйнштейна для фотоэффекта:

$$e\varphi = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{кр}} \Rightarrow \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{hc}{\lambda} . \quad (29)$$

Из этого уравнения определяем максимальный заряд оболочки

$$q = 4\pi\epsilon_0 R \frac{hc}{\lambda e} = 4\pi\epsilon_0 R w \quad (30)$$

и давление электрического поля на оболочку.

$$p = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4} = \frac{(4\pi\epsilon_0 R w)^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4} = \frac{\epsilon_0 w^2}{2R^2} \quad (31)$$

Наконец, воспользуемся полученной ранее формулой для расчета относительного увеличения радиуса шара (8):

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R_0}{2Eh} \frac{\epsilon_0 w^2}{2R_0^2} = \frac{\epsilon_0 w^2}{4EhR_0} = \frac{8,82 \cdot 10^{-12} (6,2 \cdot 10^3)^2}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}} = 4,0 \cdot 10^{-13} \quad (32)$$

Таким образом, рассчитанное увеличение радиуса шара меньше размера атома, поэтому в принципе не наблюдаемо.

Задача 3 Неоднозначность и как с ней бороться!

Часть 1. «Бревно»

1.1 Данный пункт олимпиадной задачи следует воспринимать как шутку – очевидно, что при симметричном расположении нитей их силы натяжения равны половине силы тяжести

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{2} = 98 \text{ Н}. \quad (1)$$

1.2 Если бревно подвешено горизонтально на трех нитях, можно записать следующие уравнения равновесия:

- сумма всех сил, действующих на бревно равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 = mg; \quad (2)$$

- сумма моментов сил, действующих на бревно также равна нулю, причем это условие можно записывать относительно любой точки (конца бревна, точек подвеса нитей, центра тяжести ...):

$$\sum_i M_i = 0$$

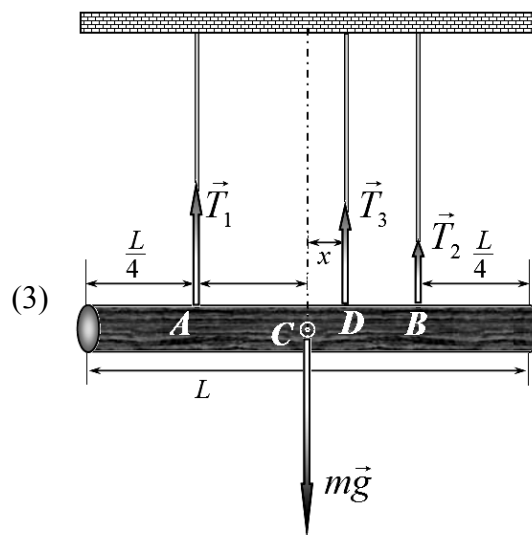
$$O: \quad T_1 \frac{1}{4}L + T_2 \frac{3}{4}L + T_3 \left(\frac{1}{2}L + x \right) = mg \frac{1}{2}L;$$

$$A: \quad T_2 \frac{1}{2}L + T_3 \left(\frac{1}{4}L + x \right) = mg \frac{1}{4}L;$$

$$C: \quad T_2 \frac{1}{4}L = T_3 x + T_1 \frac{1}{4}L;$$

$$D: \quad T_1 \left(\frac{1}{4}L + x \right) = mgx + T_2 \left(\frac{1}{4}L - x \right);$$

$$B: \quad T_1 \frac{1}{2}L + T_3 \left(\frac{1}{4}L - x \right) = mg \frac{1}{4}L;$$



Однако из всех уравнений (2)-(3) независимыми являются только два (любых), так остальные уравнения могут быть получены из выбранных двух. Следовательно, силы натяжения нитей не могут быть определены однозначно. Очевидно, что силы натяжения нитей могут быть направлены только вертикально вверх, именно эти условия ограничивают возможные диапазоны силы натяжения третьей нити. Формально эти ограничения могут быть записаны в виде неравенств $T_1 \geq 0$; $T_2 \geq 0$; $T_3 \geq 0$. Далее можно выразить силы натяжения первой и второй нитей как функции силы натяжения третьей и получить тем самым неравенства ограничивающие пределы изменения третьей нити

$$\begin{aligned} T_1(T_3) &\geq 0; \\ T_2(T_3) &\geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Получим эти неравенства в явном виде и самым быстрым способом – для этого надо выбирать уравнения, в которые входят только требуемые силы (чтобы не тратить время на алгебраические преобразования). Поэтому выберем уравнение (3), записанное для точки крепления первой нити, из которого выразим $T_2(T_3)$:

$$T_2 \frac{1}{2}L + T_3 \left(\frac{1}{4}L + x \right) = mg \frac{1}{4}L; \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}mg - T_3 \left(\frac{1}{2} + 2\frac{x}{L} \right). \quad (5)$$

Полагая $T_2 \geq 0$, получим неравенство, ограничивающее значения T_3

$$\frac{T_3}{mg} \leq \frac{1}{1 + 4 \frac{x}{L}}. \quad (6)$$

Аналогично поступим с уравнением для точки крепления второй нити:

$$T_1 \frac{1}{2} L + T_3 \left(\frac{1}{4} L - x \right) = mg \frac{1}{4} L; \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} mg - T_3 \left(\frac{1}{2} - 2 \frac{x}{L} \right) \geq 0, \quad (7)$$

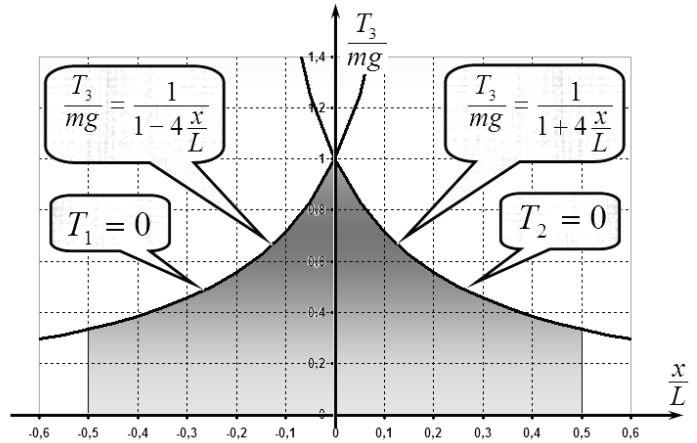
Откуда следует, что

$$\frac{T_3}{mg} \leq \frac{1}{1 - 4 \frac{x}{L}}. \quad (8)$$

Два неравенства (6), (8) могут быть записаны в виде одного

$$\frac{T_3}{mg} \leq \frac{1}{1 - 4 \left| \frac{x}{L} \right|}. \quad (9)$$

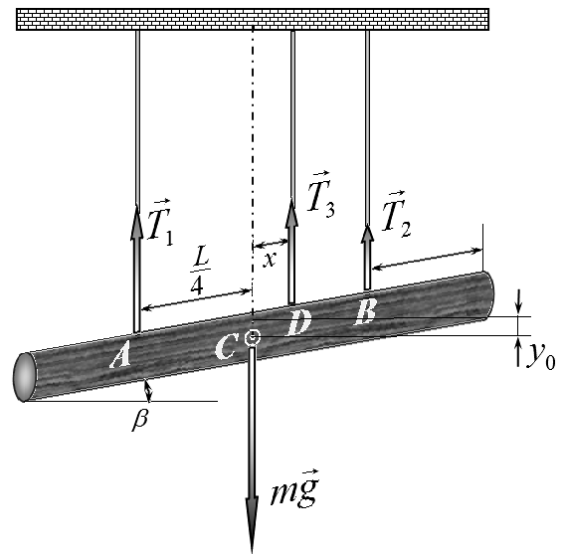
На рисунке изображена диаграмма зависимости $T_3(x)$, указывающая область возможных значений силы натяжения третьей нити (затемнена). Реализуемое значение силы натяжения третьей нити может зависеть от малых различия в длинах нитей и способа ее подвешивания.



Отметим, что данная область может быть выделена и из физических соображений: максимальной силе натяжения третьей нити соответствует нулевое натяжение другой нити, находящейся с той же стороны от оси симметрии, что и третья нить.

1.3 Если нити считать слегка растяжимыми, то бревно слегка наклонится к горизонту. Так как жесткости нитей велики, то угол наклона (который мы для простоты обозначим β) будет малым. В этом приближении можно пренебречь отклонением нитей от вертикали. Теперь то к двум (опять любым!) уравнениям равновесия (2) –(3) следует добавить выражения для сил упругостей нитей, записанные на основании закону Гука:

$$\begin{aligned} T_1 &= k \left(y_0 + \beta \frac{L}{4} \right) \\ T_2 &= k \left(y_0 - \beta \frac{L}{4} \right), \\ T_3 &= k(y_0 + \beta x) \end{aligned} \quad (10)$$



где k - коэффициент жесткостей нитей, y_0 - смещение центра бревна из-за растяжения нитей.

У нас есть богатый выбор: какие два уравнения из условия равновесия выбрать. Так как система (бревно и нити) обладает определенной симметрией, то надо выбирать наиболее симметричные уравнения. Кроме того, следует побыстрее избавляться от неизвестных и ненужных величин, таких как «придуманные» жесткость пружины, смещение центра и наклон бревна.

Исходя из этих соображений, возьмем уравнение (2), в которое входит сумма сил $T_1 + T_2$, которую также можно выразить из уравнений для сил упругости (10), это позволяет выразить значения параметра ky_0 :

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + T_3 &= mg; \Rightarrow T_1 + T_2 = mg - T_3 \\ \begin{cases} T_1 = k\left(y_0 + \beta \frac{L}{4}\right) \\ T_2 = k\left(y_0 - \beta \frac{L}{4}\right) \end{cases} &\Rightarrow T_1 + T_2 = 2ky_0 \Rightarrow ky_0 = \frac{mg - T_3}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

В уравнении равновесия (3), записанного для центра масс, легко выразить разность этих сил, которая также выражается из уравнений для сил упругости (10), что дает возможность выразить параметр $k\beta$:

$$\begin{aligned} T_1 \frac{1}{4}L &= T_3 x + T_2 \frac{1}{4}L \Rightarrow T_1 - T_2 = 4 \frac{x}{L} T_3 \\ \begin{cases} T_1 = k\left(y_0 + \beta \frac{L}{4}\right) \\ T_2 = k\left(y_0 - \beta \frac{L}{4}\right) \end{cases} &\Rightarrow T_1 - T_2 = k\beta \frac{L}{2} \Rightarrow k\beta = 8 \frac{x}{L^2} T_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим эти выражение в уравнение закона Гука для третьей нити

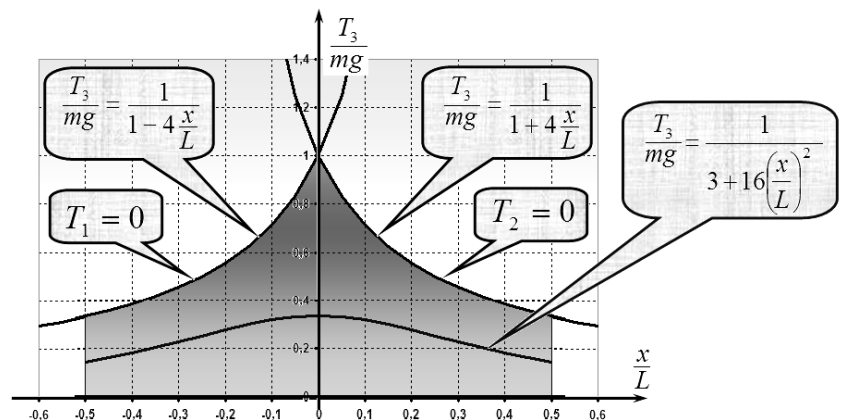
$$T_3 = k(y_0 - \beta x) = ky_0 - k\beta x = \frac{mg - T_3}{2} - 8 \frac{x^2}{L^2} T_3. \quad (13)$$

Решение этого уравнения дает искомый результат

$$\frac{T_3}{mg} = \frac{1}{3 + 16\left(\frac{x}{L}\right)^2}. \quad (14)$$

График этой функции, нанесенный на ранее построенную диаграмму, показан на рисунке. Как и следовало ожидать, эта кривая попадает в область допустимых значений.

В заключение отметим, что и последний пункт этой задачи страдает некоторой искусственностью: трудно найти абсолютно одинаковые нити и еще труднее подвязать их так, чтобы длины в недеформированном состоянии были одинаковы.



Часть 2. «Лестница»

2.1 Силы, действующие на лестницу, изображены на рисунке. Условиями равновесия являются:

- равенство нулю суммы всех сил

$$\begin{aligned} N_1 + F_2 &= mg \\ N_2 &= F_1 \end{aligned} \quad (1)$$

(в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси, соответственно);

- равенство нулю моментов сил, которое в данном случае удобно записать относительно точки C - точки пересечения перпендикуляров к стенке и полу в точках касания лестницы

$$\begin{aligned} mg \frac{L}{2} \cos \alpha &= F_1 L \sin \alpha + F_2 L \cos \alpha \Rightarrow \\ \frac{mg}{2} &= F_1 \operatorname{tg} \alpha + F_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Так как сил трения в данном случае являются силами трения покоя, то нельзя связать их с силами нормальной реакции функциональной связью, возможно только ограничиться неравенствами

$$\begin{aligned} F_1 &\leq \mu N_1 \\ F_2 &\leq \mu N_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (1)-(3) является не полной – число неизвестных (четыре – две силы трения и две силы нормальной реакции) превышает число уравнений (три), поэтому эта система однозначного решения не имеет: любые три силы могут быть выражены через одну оставшуюся. Неравенства ограничивают диапазон возможных изменений искомых сил.

2.2 Например, силы трения могут быть выражены как функции силы реакции N_1 :

- из уравнения (1)

$$F_2 = mg - N_1, \quad (5)$$

Из уравнения (3)

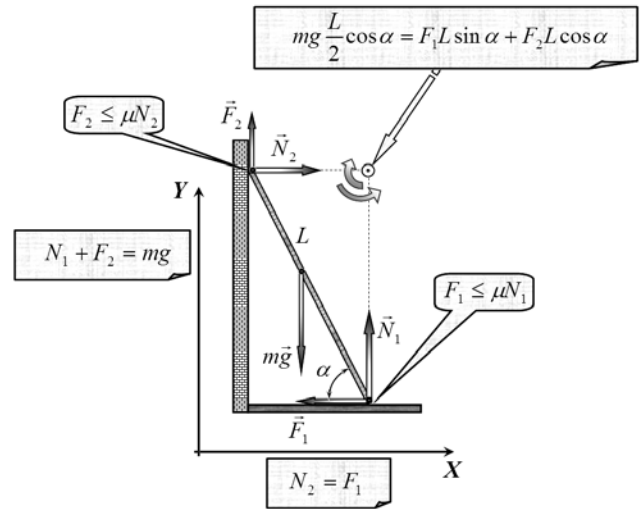
$$F_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left(N_1 - \frac{mg}{2} \right). \quad (6)$$

2.3 Так как далее необходимо анализировать диаграмму для модулей сил трения избавимся в уравнениях (1)-(3) и неравенствах (4) от сил нормальных реакций. Для этого выразим силы реакции через силы трения

$$\begin{aligned} N_1 &= mg - F_2 \\ N_2 &= F_1 \end{aligned} \quad (7)$$

и подставим в уравнение (3) и неравенства (4):

$$\begin{aligned} \frac{mg}{2} &= F_1 \operatorname{tg} \alpha + F_2 \\ F_1 &\leq \mu (mg - F_2) \\ F_2 &\leq \mu F_1 \end{aligned} \quad (8)$$



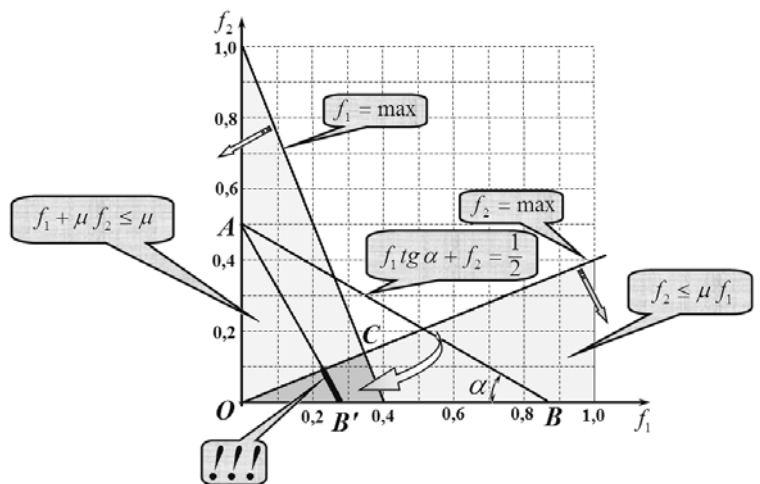
Эта система определяет возможные диапазоны изменения сил трения. Для упрощения анализа системы перейдем к указанным в условии безразмерным параметрам $f_1 = \frac{F_1}{mg}$ и

$f_2 = \frac{F_2}{mg}$, для чего разделим уравнение и неравенства (8) на модуль силы тяжести mg . В результате получим

$$\begin{aligned} f_1 + \mu f_2 &< \mu \\ f_2 &< \mu f_1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{1}{2} \quad (10)$$

Изобразим графически на диаграмме (f_1, f_2) области удовлетворяющие неравенствам (см. рис). Их пересечение (темный треугольник) определяет область допустимых значений, ограниченную максимально возможными значениями сил трения. Построим также на этой диаграмме прямую AB , описываемую уравнением (10). Наклон этой прямой к отрицательному направлению оси равен α . При увеличении этого угла прямая приближается к области допустимых значений. В том же случае, когда эта прямая пересекает область допустимых значений, появляются возможные решения системы (9)-(10). В частности, для прямой AB' является отрезок, лежащий внутри треугольника допустимых значений (этот отрезок отмечен тремя восклицательными знаками).



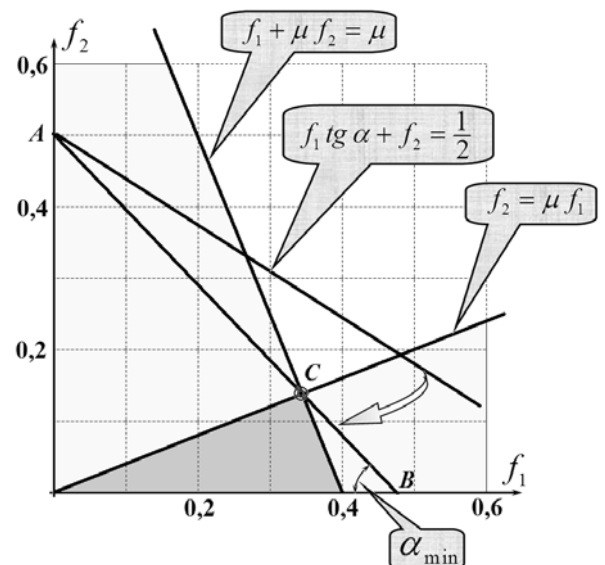
2.4 Построенная диаграмма позволяет рассмотреть все возможные варианты изменения силы трения $F_1(\operatorname{tg} \alpha)$ в зависимости от угла наклона лестницы.

При малых углах прямая AB не пересекает область допустимых значений, поэтому лестница не может находиться в равновесии.

Минимальному углу наклона лестницы соответствует ситуация, когда прямая AB пересекает точку C в этом случае максимального значения достигают обе силы трения (о пол и о стену). В этом случае выполняются уравнения

$$\begin{aligned} f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 &= \frac{1}{2} \\ f_1 + \mu f_2 &= \mu \\ f_2 &= \mu f_1 \end{aligned} \quad (11)$$

решение которых позволяет найти значения минимального угла наклона лестницы.



Выразим значения сил трения

$$\begin{cases} f_2 = \mu f_1 \\ f_1 + \mu f_2 = \mu \end{cases} \Rightarrow f_1 + \mu^2 f_1 = \mu \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{\mu}{1 + \mu^2} \\ f_2 = \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \end{cases} \quad (12)$$

И подставим в первое уравнение системы, из которого найдем значение минимального угла

$$\frac{\mu}{1 + \mu^2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{1 - \mu^2}{2\mu}. \quad (13)$$

Численное значение минимального угла при заданном значении коэффициента трения

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{1 - \mu^2}{2\mu} = 1,05 \quad (14)$$

$$\alpha_{\min} \approx 46,4^\circ$$

При дальнейшем увеличении угла наклона появляется область изменения силы трения F_1 .

Для определения минимального значения рассматриваемой силы необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{1}{2} \\ f_2 = \mu f_1 \end{cases} \Rightarrow f_{1\max} = \frac{1}{2(\mu + \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (15)$$

Максимальное значение этой силы находится из системы уравнений

$$\begin{cases} f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{1}{2} \\ f_1 + \mu f_2 = \mu \end{cases} \Rightarrow f_{1\max} = \frac{\mu}{2(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (16)$$

При дальнейшем увеличении угла наклона прямая AB пресекает треугольник допустимых значений на его нижнем основании. Поэтому в этом случае максимальное значение определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{1}{2} \\ f_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f_{1\max} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (17)$$

Таким образом, область возможных значений силы трения о пол ограничена тремя гиперболами, описываемой функцией (17); смещенной, описываемой функцией (16) и «перевернутой», задаваемой функцией (16). Эти области показаны на рисунке, выделена область изменения силы трения о пол.

