

Задача 9-1 Опыт Физо.

1. Свет распространяется не мгновенно, а с конечной (хотя и очень большой) скоростью. Зубчатое колесо разбивает световой поток на отдельные «порции» - импульсы. Если за время движения светового импульса от колеса до зеркала и обратно, колесо успеет повернуться на угол одного зубца, то он не сможет пройти через колесо.

2. Рассмотрим сначала прохождение света через колесо типа 1, в котором размеры зубцов и выемок одинаковы. Свет, проходящий через вращающееся колесо, разбивается на импульсы, длительность которых равна

$$\tau = \frac{T}{2N} = \frac{1}{2Nn}. \quad (1)$$

Промежуток времени между импульсами также равен τ . Эти импульсы возвращаются обратно через время, которое требуется свету для преодоления расстояния от колеса до зеркала и обратно,

$$t_0 = \frac{2L}{c}. \quad (2)$$

На рис. 2 показаны временные диаграммы импульсов, уходящих от колеса (сплошная заливка) и возвращающихся от зеркала (квадратная штриховка). Области их перекрытия определяют промежутки времени, когда возвращающийся свет проходит между зубьев и попадает к наблюдателю.

Из рис. 2а видно, что при $t_0 < \tau$ интервал времени, в котором свет виден, равен $(\tau - t_0)$. Очевидно, что средняя интенсивность пропорциональна промежутку времени в течение, которого свет доходит до наблюдателя. Поэтому в данном случае эта интенсивность оказывается равной

$$\bar{I} = I_0 \frac{\tau - t_0}{2\tau} = \frac{I_0}{2} \left(1 - \frac{4NL}{c} n \right), \quad (3)$$

где I_0 - интенсивность наблюдаемого света при неподвижном колесе.

То есть линейно убывает с ростом частоты вращения. При $t_0 = \tau$ средняя интенсивность прошедшего света становится равно нулю (см. рис 2б).

При $t_0 > \tau$ возвращающийся импульс начинает попадать в следующий вырез. На этом интервале средняя интенсивность описывается формулой

$$\bar{I} = I_0 \frac{t_0 - \tau}{2\tau} = \frac{I_0}{2} \left(\frac{4NL}{c} n - 1 \right), \quad (4)$$

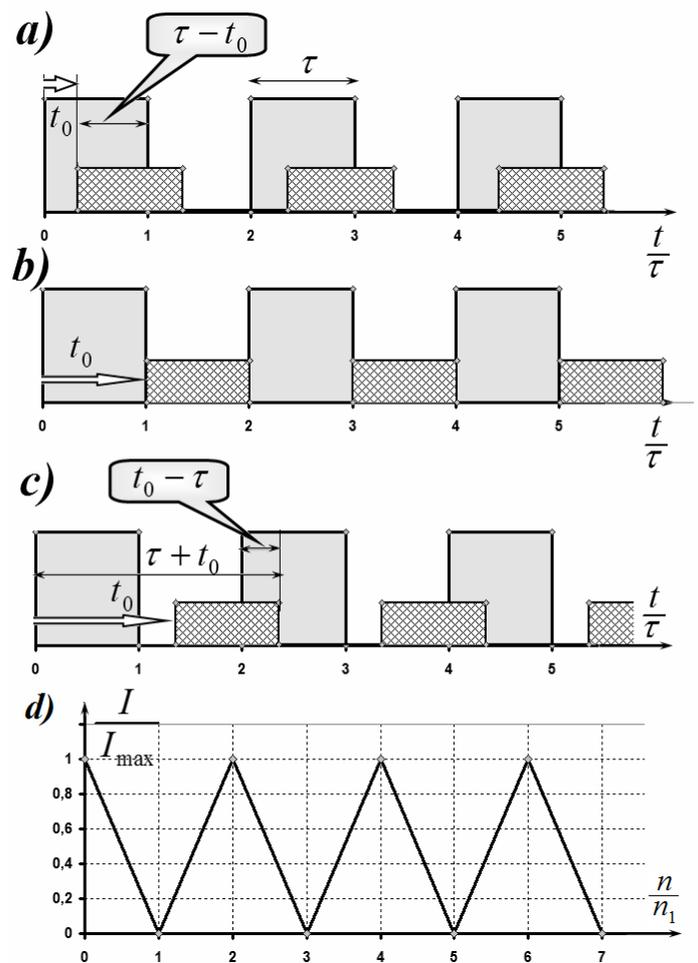


Рис. 2

Т.е. линейно возрастает с ростом частоты вращения. Этот рост будет продолжаться до тех пор, пока $t_0 < 2\tau$. При дальнейшем росте частоты вращения зависимость будет периодически повторяться. График этой зависимости показан на рис. 2d, на котором n_1 - частота при которой наступает первое полное затемнение. Эта частота может быть найдена из выражения (3):

$$n_1 = \frac{c}{4NL}. \quad (2)$$

Отметим, что все полные затемнения наступают тогда, когда время распространения светового импульса оказывается равным времени поворота колеса на «полуцелое» число зубьев, т.е.

$$t_0 = (2k+1)\tau \Rightarrow n_{\min} = (2k+1)n_1 = (2k+1)\frac{c}{4NL}. \quad (3)$$

здесь $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Максимумы средних интенсивностей наблюдаются при

$$t_0 = 2k\tau \Rightarrow n_{\min} = 2kn_1 = 2k\frac{c}{4NL}. \quad (4)$$

Анализ зависимости средней интенсивности прошедшего света для установки с колесом 2 может быть проведен аналогично.

На рис. 3 показаны такие же, как и на рис. 2, временные диаграммы выходящих после колеса импульсов и импульсов, возвращающихся с задержкой t_0 . В этом случае интервал τ равен времени в течении которого колесо поворачивается на угол соответствующий повороту на один вырез, т.е.

$$\tau = \frac{1}{3N} = \frac{1}{3Nn}. \quad (5)$$

Зависимость средней интенсивности регистрируемого света от времени описывается формулами

$$\bar{I} = \frac{I_0}{3} \frac{\tau - t_0}{\tau} = \frac{I_0}{3} \left(1 - \frac{6LN}{c} n \right), \quad n < \frac{c}{6LN}$$

$$\bar{I} = 0, \quad \frac{c}{6LN} < n < 2\frac{c}{6LN}$$

$$\bar{I} = \frac{I_0}{3} \left(\frac{6LN}{c} n - 2 \right), \quad n > 2\frac{c}{6LN}$$

В этом случае максимальная средняя интенсивность наблюдается при

$$n = 3kn_1 = 3k\frac{c}{6LN}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

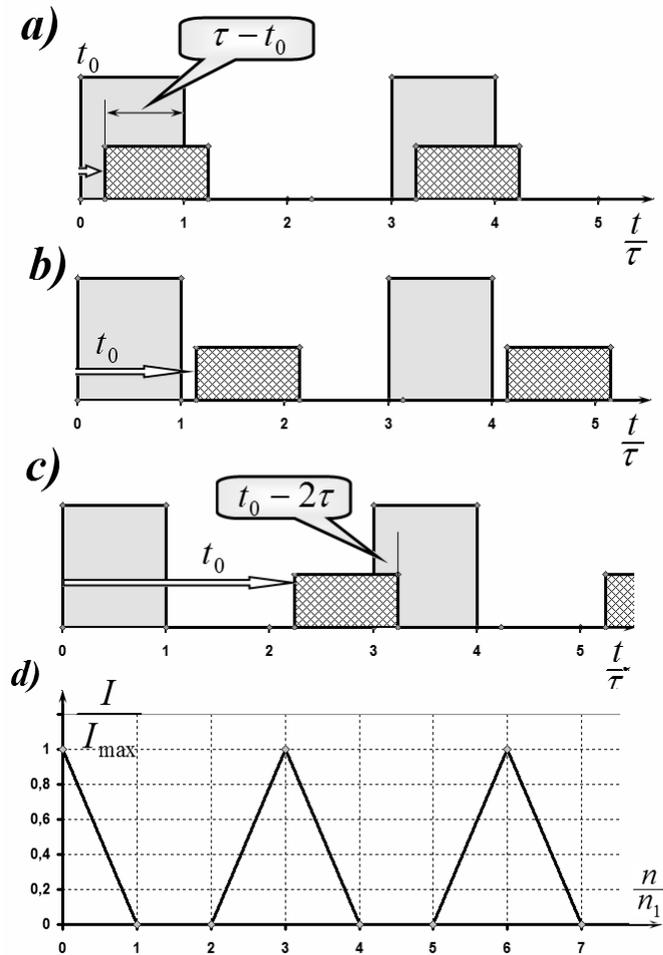


Рис. 3

3. Из формулы (3) следует, что скорость света может быть выражена следующим образом через параметры системы и результаты измерения

$$n_1 = \frac{c}{4NL} \Rightarrow c = 4NLn_1 = 4 \cdot 720 \cdot 8,63 \cdot 10^3 \cdot 12,5 = 3,10 \cdot 10^8 \frac{M}{c}. \quad (5)$$

Задача 9-2. Осциллограммы

1. При подключении осциллографа к точкам М и D он будет показывать напряжение на резисторе R_1 , при подключении к точкам D и E осциллограф покажет напряжение на резисторе R_2 . При последовательном соединении напряжения на резисторах распределяется прямо пропорционально их сопротивлениям. Следовательно диапазон напряжений на резисторе R_1 составит от $-2,0\text{В}$ до $2,0\text{В}$, на резисторе R_2 – от $-4,0\text{В}$ до $4,0\text{В}$. Графики зависимости напряжения от времени на резисторах R_1 и R_2 представлены на рисунках 1 и 2.

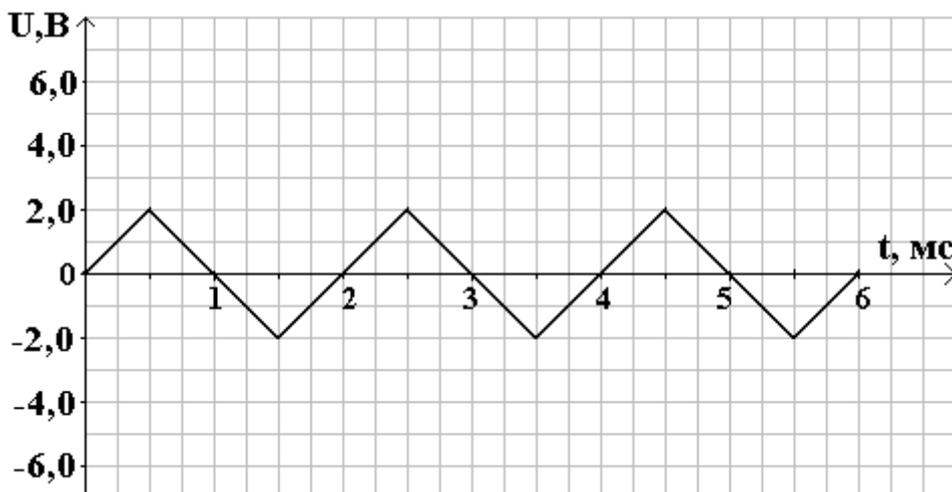


Рисунок 1. График зависимости напряжения от времени на резисторе R_1 .

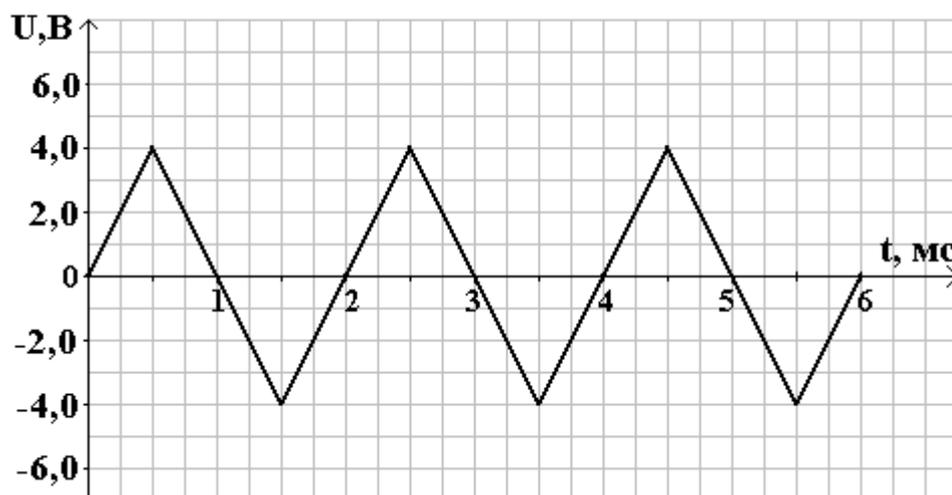


Рисунок 2. График зависимости напряжения от времени на резисторе R_2 .

2. При подключении осциллографа к точкам М и D он будет показывать напряжение на резисторе R_1 , при подключении к точкам D и E осциллограф покажет напряжение на диоде.

На временных интервалах от 0 до 1 мс, от 2 до 3 мс, от 4 до 5 мс диод закрыт. Сопротивление диода бесконечно большое, сопротивлением резистора R_1 на данных временных интервалах можно пренебречь. Всё напряжение, которое выдаёт источник в эти временные интервалы, будет приходиться на диод, напряжение на резисторе R_1 будет равно нулю.

На временных интервалах от 1 до 2 мс, от 3 до 4 мс, от 5 до 6 мс диод открыт. Сопротивление диода равно нулю. Всё напряжение, которое выдаёт источник в эти

временные интервалы, будет приходиться на резистор R_1 , напряжение на диоде будет равно нулю.

Графики зависимости напряжения от времени на резисторе R_1 и диоде представлены на рисунках 3 и 4.

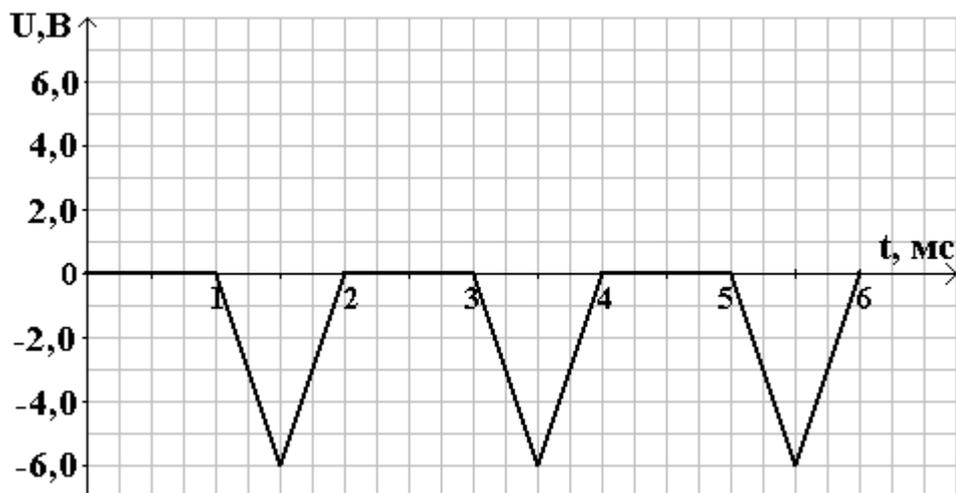


Рисунок 3. График зависимости напряжения от времени на резисторе R_1 .

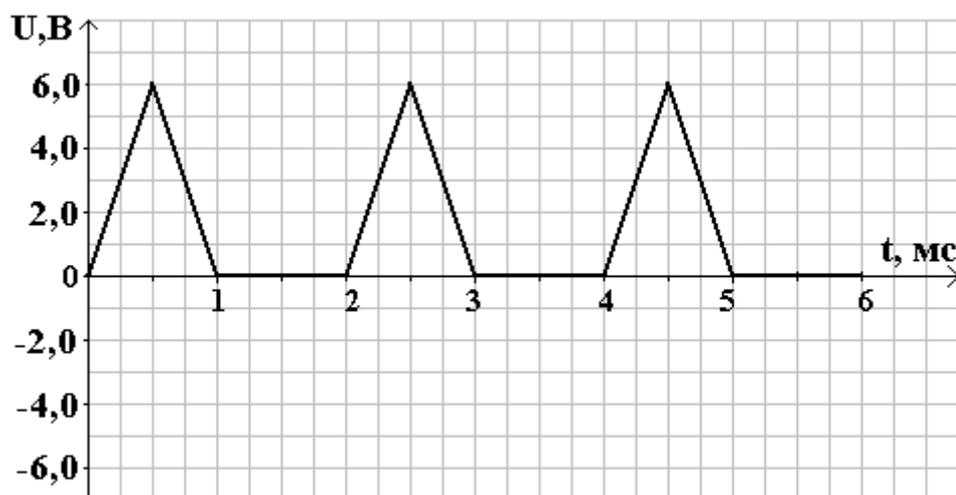


Рисунок 4. График зависимости напряжения от времени на диоде.

3. Для того чтобы осциллограф показал напряжение на резисторе R_1 его необходимо подключить к точкам М и D. Так как диод и резистор R_2 включены параллельно друг другу, то зависимость напряжения от времени для них будет одна и та же. Осциллограф, подключенный к точкам D и E будет одновременно показывать напряжение и на резисторе R_2 и на диоде.

На временных интервалах от 0 до 1мс, от 2 до 3мс, от 4 до 5мс диод открыт. Сопротивление диода равно нулю, следовательно и сопротивление участка цепи между точками D и E тоже равно нулю. Всё напряжение, которое выдаёт источник в эти временные интервалы, будет приходиться на резистор R_1 , напряжение на диоде и резисторе R_2 будет равно нулю.

На временных интервалах от 1 до 2мс, от 3 до 4мс, от 5 до 6мс диод закрыт. Сопротивление диода бесконечно большое, поэтому сопротивление участка цепи между точками D и E на данных временных интервалах будет равно сопротивлению резистора R_2 . Напряжение, которое выдаёт источник в эти временные интервалы, будет распределяться между участками M-D и D-E прямо пропорционально сопротивлению резисторов R_1 и R_2 .

Графики зависимости напряжения от времени на резисторе R_1 , резисторе R_2 и диоде представлены на рисунках 5 и 6.

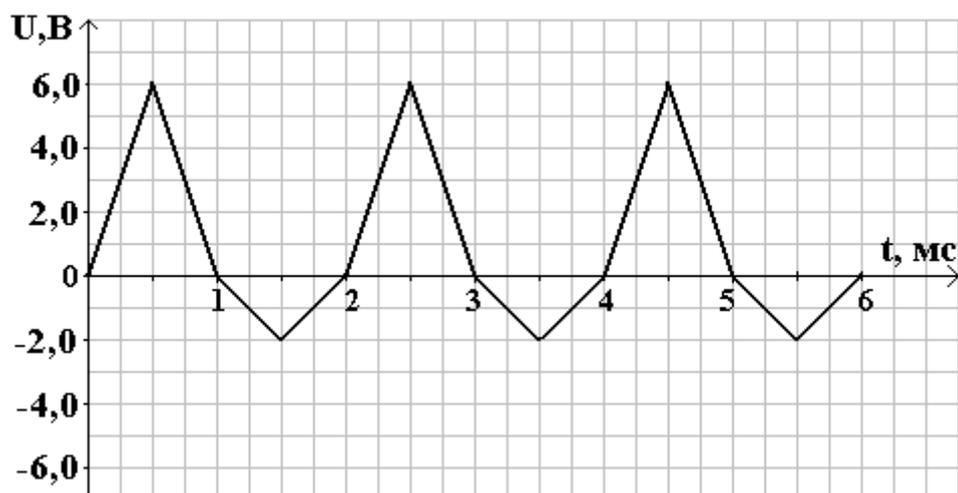


Рисунок 5. График зависимости напряжения от времени на резисторе R_1 .

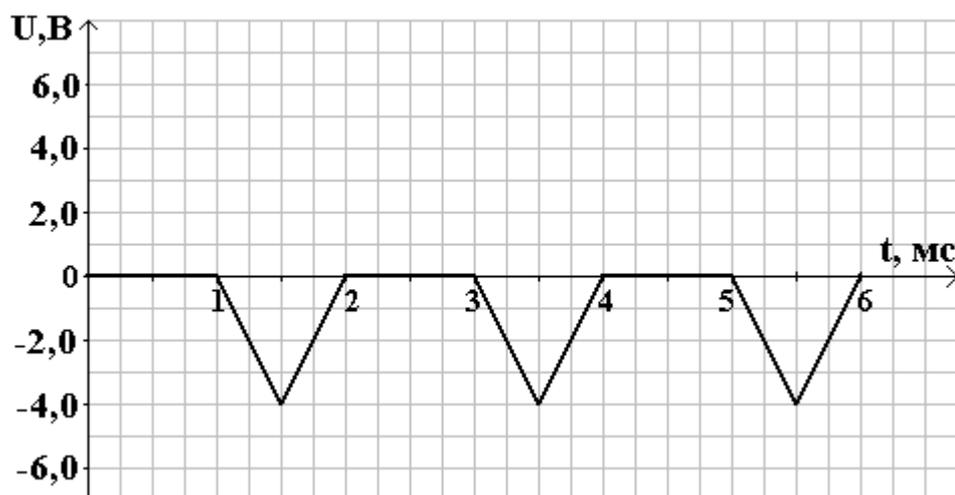


Рисунок 6. График зависимости напряжения от времени на резисторе R_2 и диоде.

4. Сопоставляя графики на рисунках 9 и 10 с графиком на рисунке 8 видим, что зарядка или перезарядка конденсатора до максимального напряжения U_0 длится в течении 1мс, а импульс напряжения, создаваемого источником, длится 2мс. Следовательно, за время импульса конденсатор успевает полностью зарядиться или перезарядиться. Так как сопротивление конденсатора постоянному току бесконечно большое, то конденсатор будет заряжаться или перезарядаться до напряжения создаваемого источником. То есть первую половину длительности импульса напряжение на конденсаторе будет изменяться в соответствии с графиком 9 или 10, а вторую половину длительности импульса – будет равным напряжению источника. Напряжение на резисторе R_2 в любой момент будет равно разности напряжений на источнике и конденсаторе. В момент времени 2мс напряжение на источнике $U_0 = -6,0\text{В}$, а на конденсаторе напряжение ещё не успевает измениться и напряжение на нём можно считать равным $U_C = 6,0\text{В}$. Следовательно, напряжение на резисторе R_2 в момент времени 2мс составит:

$$R_2 = U_0 - U_C = -6,0\text{В} - 6,0\text{В} = -12\text{В} \quad (1)$$

Напряжение на резисторе R_2 в момент времени 4мс составит:

$$R_2 = U_0 - U_C = 6,0\text{В} - (-6,0\text{В}) = 12\text{В} \quad (2)$$

Графики зависимости напряжения от времени на конденсаторе и резисторе R_2 представлены на рисунках 7 и 8.

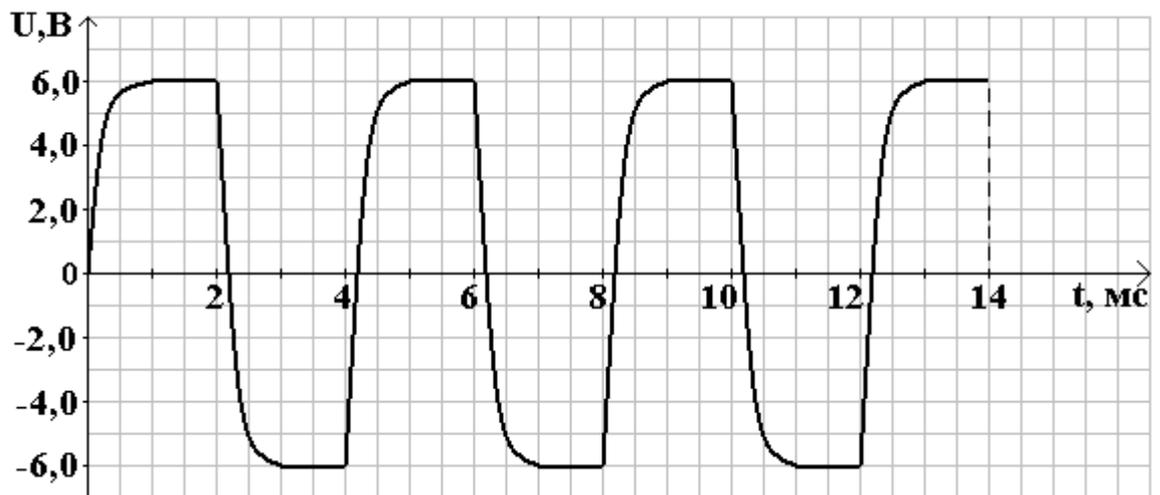


Рисунок 7. График зависимости напряжения от времени на конденсаторе.

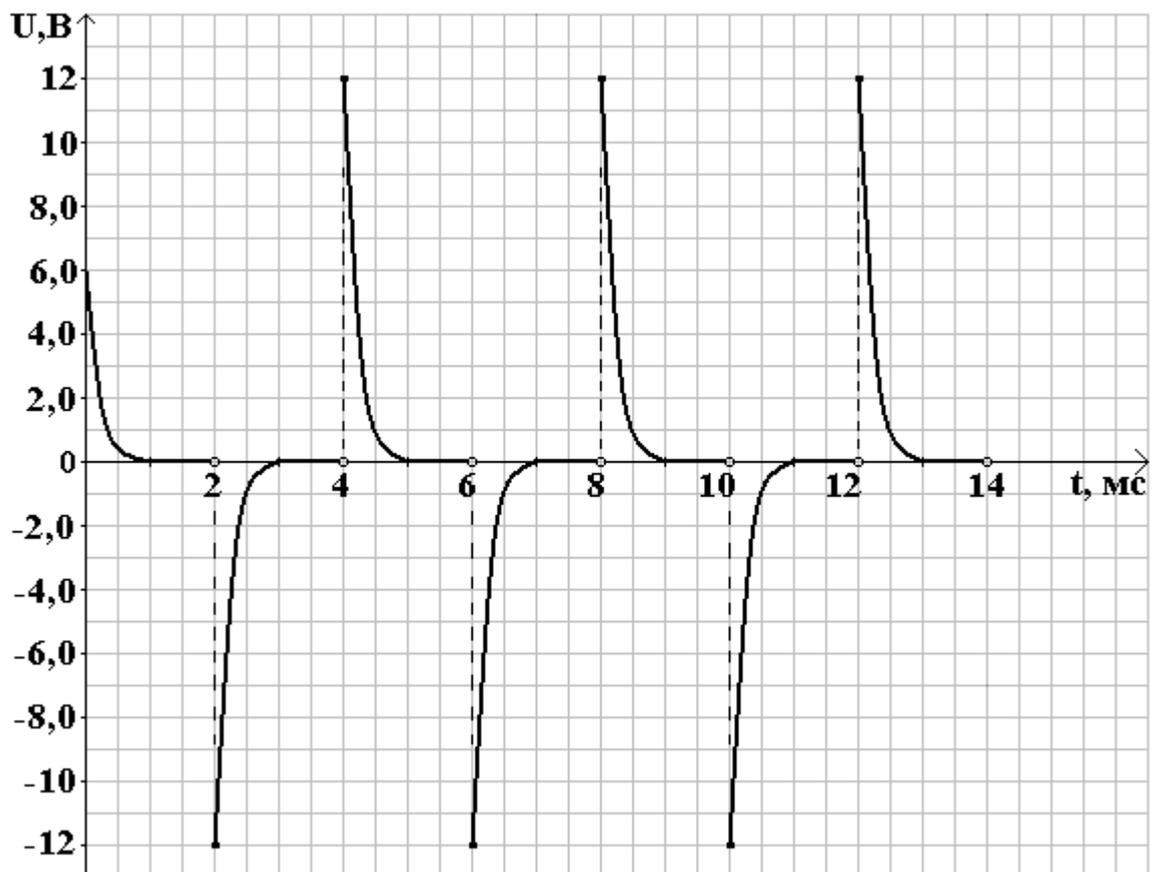


Рисунок 8. График зависимости напряжения от времени на резисторе R_2 .

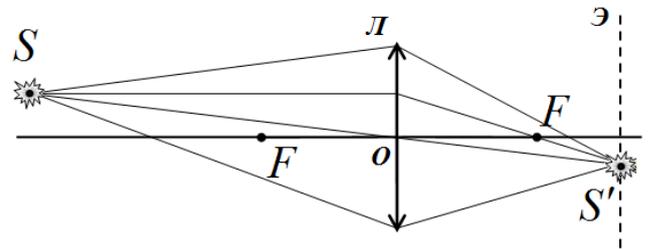
Задача 3. Геометрическая оптика и ... никакого фотошопа!

Решение этой задачи вызвало серьезные трудности у участников олимпиады и их руководителей. Поэтому мы посчитали возможным привести здесь не только полное решение данной задачи, но и достаточно обширные пояснения и комментарии.

Как формируется изображение на экране.

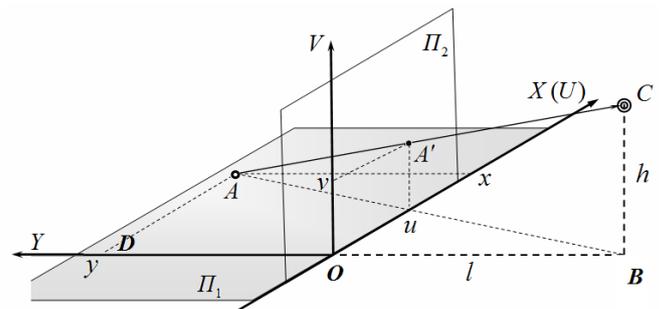
Начнем с того, что человек видит (ощущает) только то свет, который попадает ему в глаз. И никаким способом человек не может определить, откуда на самом деле пришли лучи света, попадающие ему в глаз. Упрощенная оптическая схема глаза принципиально совпадает с оптической схемой фотоаппарата, поэтому дальнейшее рассуждение в одинаковой степени относится как к глазу, так и к фотоаппарату. Принципиально, их основными оптическими элементами являются собирающая линза и экран (рис. 1): у глаза зрачок и сетчатка, соответственно; у фотоаппарата – объектив и светочувствительная матрица.

Лучи света, идущие от источника S , попадающие на линзу (это важно!) собираются в одной точке S' на экране, формируя точечное изображение точечного источника. Это изображение фиксируется либо матрицей фотоаппарата, либо сетчаткой глаза. Таким образом, «первоисточником» изображения является расходящийся пучок лучей, попадающих на линзу. Самым важным для дальнейших рассуждений является луч SS' , проходящий через оптический центр линзы O и потому идущий без изменения направления (без преломления). Поэтому любая точка регистрируемого предмета, лежащая на прямой OS дает изображение (при надлежащей фокусировке) в одной точке S' на экране¹.



Это и есть основная идея приведенной в условии задачи «теории перспективы». Рассмотрим подробнее приведенный в условии рисунок.

Под точкой съемки C следует понимать оптический центр линзы (зрачка глаза, или объектива фотоаппарата). Так как точки A и A' лежат на одном луче, попадающем в оптический центр, их изображения на экране будут совпадать. Таким образом, приведенная «теория перспективы» объясняет, почему правила построения изображений в картинной плоскости Π_2 дают то же изображение на сетчатке, что и реальные предметы в трехмерном пространстве. Заметим, что приведенные правила можно обобщить действительно на трехмерное пространство. Для упрощения задачи мы рассматриваем только точки, лежащие на горизонтальной плоскости XU . Без особого труда можно поставить общую задачу: положение некоторой точки фотографируемого предмета задается тремя координатами (x, y, z) , найдите координаты (u, v) изображения этой точки на картинной плоскости. Если основная идея построения



¹ Мы не касаемся такой интересной проблемы, как человеческое восприятие глубины (дальности до изображаемого предмета), которое обусловлено главным образом стереоскопическим эффектом. С этой же проблемой тесно связана и проблема глубины резкости изображения фотоаппарата: почему точки, находящиеся на разных расстояниях от линзы могут давать одинаково четкие изображения.

перспективных изображений усвоена, то дальнейший ход решения становится почти очевидным.

1.1 . Найдем связь между координатами точки предмета $A(x, y)$ и ее изображения $A'(u, v)$.

Из треугольника ABD следует

$$\frac{u}{l} = \frac{x}{l+y} \Rightarrow u = \frac{l}{l+y}x \quad (1)$$

Далее рассматривая треугольники ACB и ABD , находим

$$\frac{v}{y} = \frac{h}{l+y} \Rightarrow v = \frac{h}{l+y}y \quad (2)$$

1.2 Фотография сделана так, что солнце находится непосредственно перед фотоаппаратом, поэтому можно считать, что тени деревьев являются прямыми линиями, параллельными оси OY . Поэтому найдем уравнение изображения прямой, параллельной оси OY и пересекающей ось OX в точке с координатой x_0 . Выразим из (1) координату y , получим

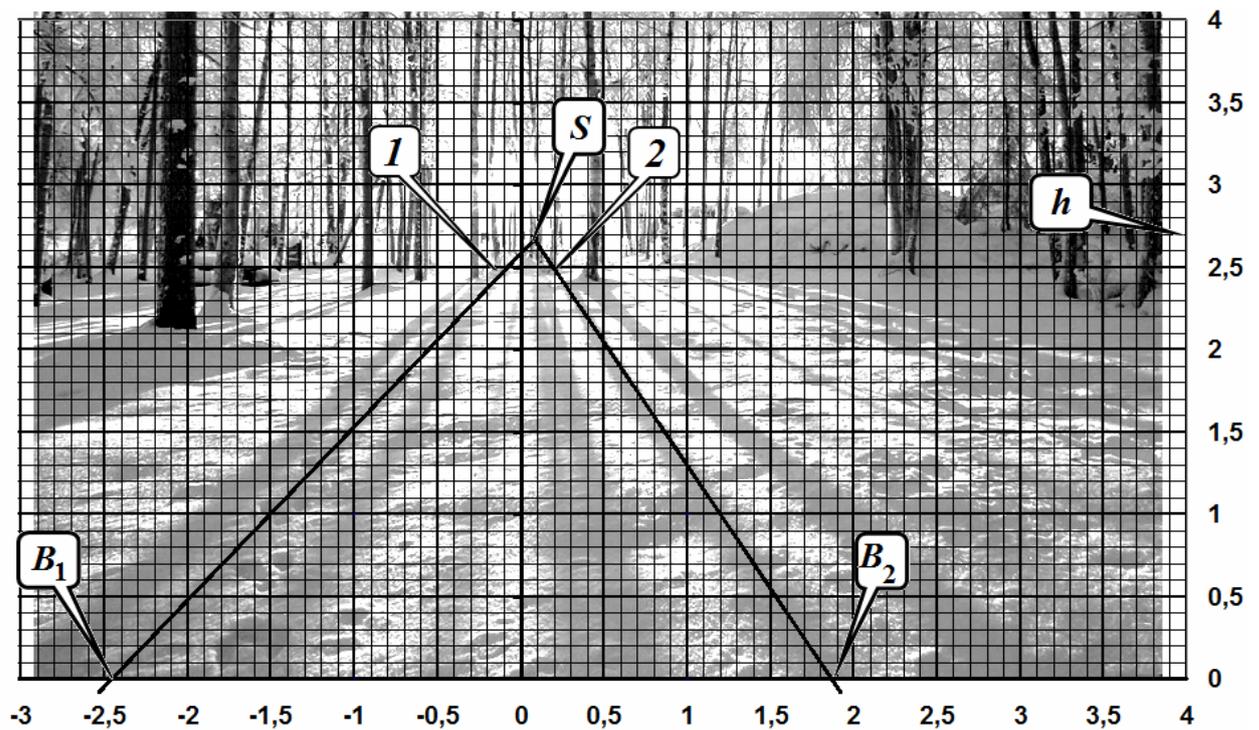
$$l+y = l \frac{x_0}{u} \Rightarrow y = l \left(\frac{x_0}{u} - 1 \right) \quad (3)$$

и подставим теперь полученное выражение в (2), в результате получим уравнения изображения этой прямой $v(u)$ в плоскости изображений

$$v = \frac{hu}{lx_0} l \left(\frac{x_0}{u} - 1 \right) \Rightarrow v = h \left(1 - \frac{u}{x_0} \right) \quad (4)$$

Полученной выражение является уравнением прямой. Следовательно, горизонтальные тени изображаются в виде прямых линий.

1.3 Из полученного уравнения прямой (4) следует, что ее коэффициент наклона зависит от координаты x_0 . Т.е. прямые параллельные тени изображаются в виде не параллельных прямых на фотографии. В этом и состоит эффект «перспективы».



1.4 Теперь можно внимательно рассматривать фотографию. Из уравнения прямой (4) следует, что при $v = 0$ $u = x_0$. Поэтому координаты x_{01}, x_{02} указанных деревьев можно найти как координаты точек пересечения теней этих деревьев с нижним срезом фотографии B_1, B_2 , которая совпадает с осями X и U . Из рисунка находим, что расстояние между ними примерно равно $\Delta x \approx 4,3\text{ м}$. Впрочем, этот вывод можно сделать и не получая уравнение изображений теней: сами тени параллельны, поэтому расстояние между ними неизменно!

1.5 Из уравнения прямых (4) следует, что все они пресекаются в одной точке S с координатами $u_S = 0, v_S = h$ (так называемой точке схода). Поэтому продолжим тени от рассматриваемых деревьев и по координатной сетке найдем вертикальную координату точки их пересечения, которая равна высоте точки съемки $h \approx 2,7\text{ м}$.

Можно воспользоваться и другим более длинным путем: по рисунку найти коэффициенты уравнения прямой одной из теней и уже по ним определить искомую высоту точки съемки.

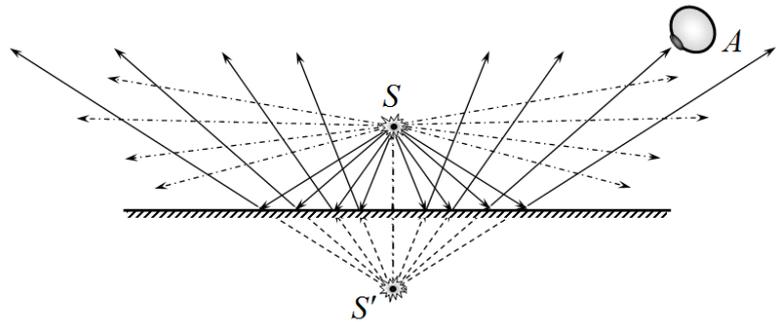
1.6 Расстояние до деревьев есть их координата u в горизонтальной плоскости предметов. Эту координату легко вычислить из формулы (3). Так для второго дерева по рисунку находим $x_0 \approx 1,9\text{ м}$, $u \approx 0,2\text{ м}$, следовательно

$$y = l \left(\frac{x_0}{u} - 1 \right) \approx 5,0 \cdot \left(\frac{1,9}{0,2} - 1 \right) \approx 42\text{ м} \quad (5)$$

1.7 Вопрос для наблюдательных и сообразительных учеников. Тени некоторых деревьев (в правой части снимка) изогнуты, поскольку там находится ... небольшой сугроб! Это обстоятельство и приводит к наблюдаемым искажениям.

Что такое изображение в плоском зеркале?

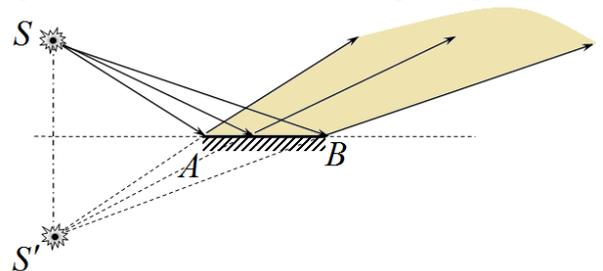
Построить изображение точечного источника S в плоском зеркале может каждый ученик! Достаточно отобразить его зеркально и получить изображение S' . Но какой смысл имеет построенное изображение? Ведь за зеркалом света нет!



Ответ на поставленный вопрос следующий. В рамках геометрической оптики свет представляется в виде набора (семейств) лучей. Поэтому описание освещенного пространства задается описанием проходящих через него лучей. В случае точечного источника, расположенного над плоским зеркалом, освещенной частью является только верхняя часть пространства. Все лучи, проходящие через него, можно разделить на две группы: идущие непосредственно от источника S (на рис. изображены штрихпунктирными линиями) и лучи отраженные от зеркала (сплошные линии). Структура последних такова, что они как бы выходят из одной точки S' , которая является изображением источника. Таким образом, смысл изображения – в представлении структуры отраженных лучей! Если расположить глаз A так, чтобы отраженные лучи попадали в его зрачок, то глаз (или фотоаппарат) сформирует изображение такое же, как и лучи реально исходящие из этого источника. И никаким способом ни глаз ни фотоаппарат не смогут определить реальный это источник, или мнимый! Важно также отметить, что продолжения всех отраженных лучей пересекаются в одной точке, поэтому, где бы ни был расположен наблюдатель, он всегда будет видеть источник S' в одном и том же месте!

Ситуация несколько осложняется, если зеркало AB имеет конечные размеры.

В этом случае область, в которой распространяются отраженные лучи ограничена лучами, отраженными от краев зеркала (на рис. эта область выделена заливкой). Изображение S' (которое строится по тем же правилам, что и для бесконечного зеркала) можно зафиксировать (увидеть) только в том случае, если наблюдатель находится в выделенной области. Иными словами, можно сказать, что изображение существует только в этой выделенной области.



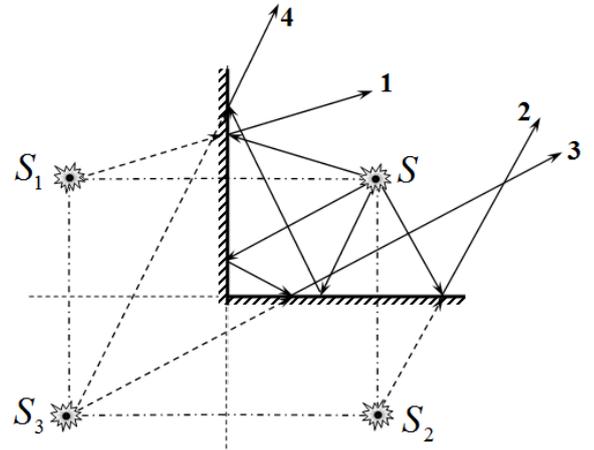
Поразмышляйте самостоятельно, какой смысл имеют 3 изображения S_1, S_2, S_3 точки S , находящейся между двумя взаимно перпендикулярными зеркалами:

S_1 - описывает лучи 1, отраженные от первого зеркала;

S_2 - описывает лучи 2, отраженные от второго зеркала;

S_3 - описывает лучи 3, отраженные сначала от первого зеркала, а потом от второго; а также лучи 4 отраженные сначала от второго зеркала,

потом от первого. Можно сказать, что S_3 является изображением как S_1 , так и S_2 .



Теперь можно привести решение второй части задачи.

2.1 «Восход без солнца...» Хитрый «секрет» этой фотографии заключается в том, что фотограф в лодке имеет ... некоторый рост. Это обстоятельство приводит к тому, что точка съёмки не находится на поверхности воды (плоскости отражения света). Следовательно, строго говоря, прямой вид восхода солнца и его отражение в озере не являются симметричными, т.е. имеют определенные различия. Удача фотокадра (возможно и «случайная»!) заключается в том, что в эти различия в данном случае попало и отражение в воде восходящего солнца.

Изобразим схематически фотографа высотой h и дерево OB высотой H в виде простейшей оптической схемы, изображенной на рисунке. Как видно из схемы, если угловая высота Солнца над горизонтом больше угла BAH , то Солнце взойдет над деревьями при прямом наблюдении. Однако для наблюдения его отражения в воде требуется больший угол CAH , который при восходе светила достигается несколько позже во времени. Соответственно, в течение некоторого промежутка времени будет наблюдаться интересный эффект, попавший в удачный кадр: в воде будет отсутствовать отражение солнца ...

2.2 Из построенных треугольников, получим количественное условие для данного эффекта. Пусть угловая высота солнца над горизонтом α . Тогда из чертежа можем записать условия видимости светила над деревьями

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{H-h}{L} . \quad (6)$$

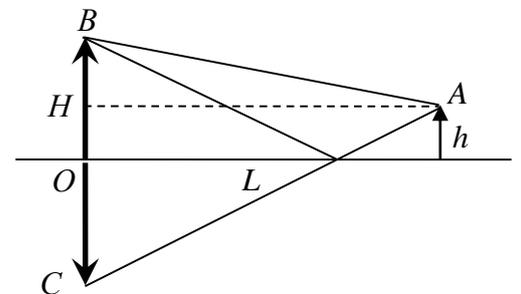
Соответственно, для появления отражения солнца в воде, необходимо выполнение дополнительного условия

$$\tan \beta > \frac{H+h}{L} . \quad (7)$$

Учитывая малость углов при восходе солнца можно тангенсы углов заменить самими углами. Тогда условие наблюдения эффекта запишется в виде

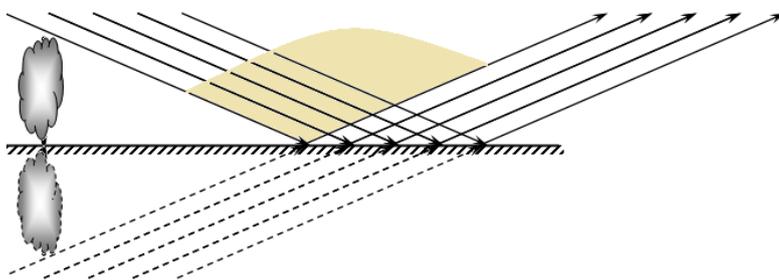
$$\frac{H-h}{L} < \alpha < \frac{H+h}{L} . \quad (8)$$

Теперь понятно, почему нельзя наблюдать отражение Солнца в воде – отражения вершущек деревьев, кустов в воде заслоняют его от наблюдателя. Следовательно, «секрет» исчезновения



Солнца в воде прост – уровень съёмки находится выше уровня воды (на величину роста фотографа). Это и приводит к различиям видимых картинок – картинка в воде не совпадает с картинкой прямого наблюдения, как это было бы, если бы съёмка производилась строго с поверхности воды.

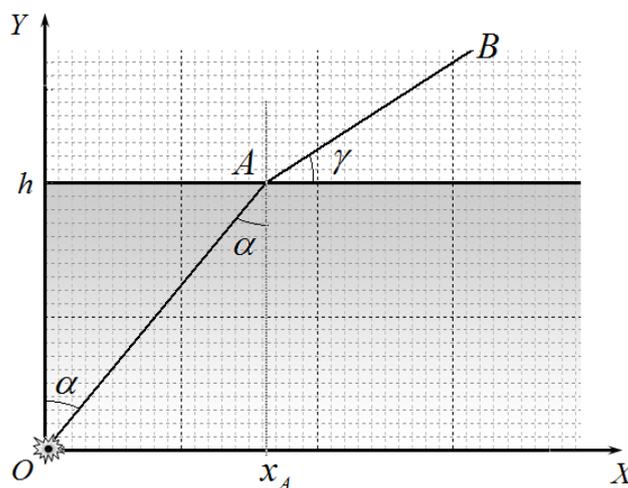
Приведем также еще один рисунок, на котором показаны лучи, идущие непосредственно от Солнца (заметьте, параллельные) и отраженные от поверхности воды. Заливкой выделена область, в которой должен находиться фотоаппарат, чтобы зафиксировать приведенный эффект.



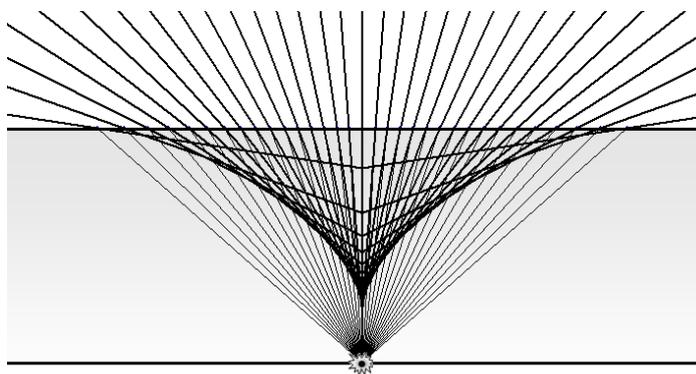
4. Всегда ли существует видимое изображение?

Заголовок третьей части задачи явно подсказывает, что в основе данного эффекта лежит преломление света на стенке аквариума.

Поэтому рассмотрим традиционную задачу о построении изображения источника, лежащего на дне бассейна некоторой глубины h . Для дальнейшей формализации введем систему координат, начало отсчета которой совместим с источником. Изобразим ход произвольного луча, выходящего из источника под некоторым углом α (не обязательно малым!). После преломления в точке A он «прижмется» к поверхности воды, т.е. поедет под большим углом к нормали.

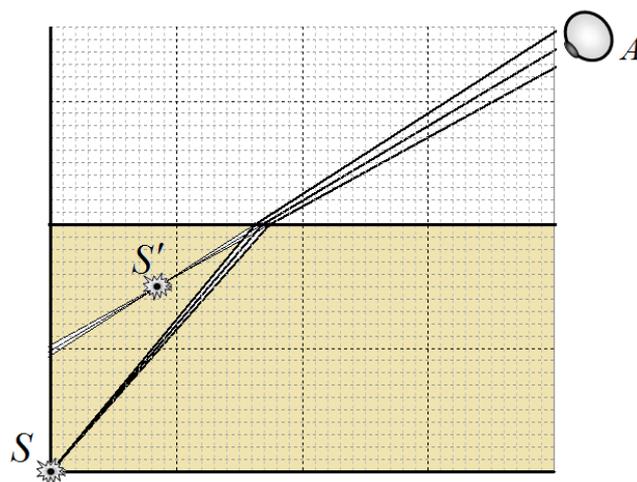


Для определения положения изображения необходимо построить все лучи выходящие из источника. Результат такого построения показан на рисунке². На нем также изображены продолжения лучей после преломления (жирные линии). Результат построения обескураживает – продолжения лучей не пересекаются в одной точке! Следовательно, изображения источника в строгом смысле не существует! Но, всем известно, что если смотреть на дно бассейна, то оно видно, и достаточно резко!

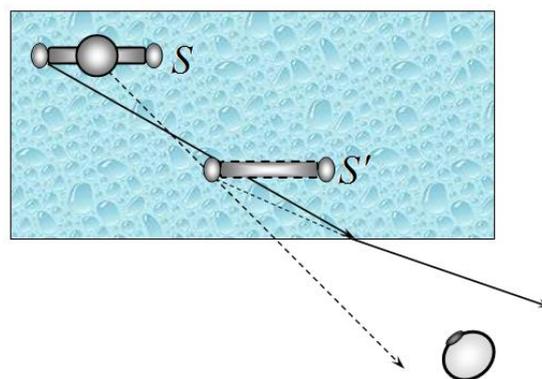


² Конечно, такое построение желательно выполнять точно. Приведен рисунок (как и все остальные в данной статье) построены «честно» с помощью компьютера. У участников олимпиады нет возможности использовать современные технические возможности, поэтому достаточно было нарисовать качественно ход рассматриваемых лучей!

Разрешение данного парадокса заключается в том, что размеры зрачка глаза и объектива фотоаппарата малы. Следовательно, изображение формируется узким пучком лучей, попадающих в глаз наблюдателя. Поэтому для построения изображения необходимо рассматривать только узкий пучок лучей (рис.), продолжения которых пересекаются и тем самым формируют четкое изображение. Подчеркнем – изображение формируется теми лучами, которые попадают в глаз или объектив фотоаппарата. Тем самым мы приходим к неожиданному выводу: положение изображения зависит от точки наблюдения!



При внимательном рассмотрении хода всех лучей, испущенных источником, можно понять, что его будут находить на огибающей семейства продолжений преломленных лучей. Проведенное построение показывает, что при уменьшении угла γ (см. рис.) изображение смещается не только по вертикали, но и по горизонтали приближаясь к наблюдателю. Поэтому при фотографировании под углом к стенке аквариума можно подобрать точку наблюдения такую, что смещение изображения туловища позволило совместить неподвижное изображение головы со сдвинутым изображением руки физика (см. рис.).



5. Необходимое, но не обязательное дополнение.

Проведенные рассуждения и качественные построения дают ответы на поставленные в условии задачи вопросы. Но, настало время «проверить алгеброй... геометрию». Иными словами, показать, как можно формализовать и перевести на язык строгих алгебраических формул приближенные геометрические построения.

Итак, основная идея определения положения изображения – поиск точки пересечения близких лучей. Каждый луч, попадающий в глаз (или объектив) является отрезком прямой, поэтому может быть описан в декартовой системе координат общим уравнением

$$y = ax + b. \tag{9}$$

При рассмотрении семейства лучей (например, выходящих из одной точки) коэффициенты a, b уравнения луча (1) являются функцией некоторого параметра K . Для вычисления координат точки пересечения двух бесконечно близких лучей одного семейства (x^*, y^*) следует решить систему уравнений, описывающих эти лучи:

$$\begin{aligned} y^* &= a(K)x^* + b(K) \\ y^* &= a(K + \Delta K)x^* + b(K + \Delta K) \end{aligned} \tag{10}$$

Вычтем из второго уравнения первое, разделим получившееся уравнение на ΔK и перейдем к пределу $\Delta K \rightarrow 0$, в результате получим уравнение

$$\frac{da}{dK} x^* + \frac{db}{dK} = 0 \quad (11)$$

Из которого находится одна из координат точки пересечения

$$x^* = -\frac{b'_K}{a'_K}. \quad (12)$$

Здесь a'_K, b'_K - производные от коэффициентов линейной зависимости (9) по параметру K . Применим описанную общую схему к задаче определения координат изображений точки при преломлении на плоской поверхности (см. рис.).

В качестве переменного параметра K , определяющего семейство преломленных лучей можно использовать любой из углов, показанных на рисунке, любую тригонометрическую функцию от этих углов, координату точки преломления x_A и т.д. Выбор дело вкуса, или опыта решения подобных задач. Мы в качестве такого параметра выберем тангенс угла наклона преломленного угла к преломляющей плоской поверхности

$$\operatorname{tg} \gamma = K. \quad (13)$$

Отметим, что этот угол определяет направление на точку наблюдения. Теперь нам необходимо записать уравнение преломленного луча, выразив коэффициенты этого уравнения через введенный параметр. Для этого запишем закон преломления

$$n \sin \alpha = \cos \gamma. \quad (14)$$

Далее найдем координаты точки преломления выбранного луча

$$\begin{aligned} x_A &= h \operatorname{tg} \alpha \\ y_A &= h \end{aligned} \quad (15)$$

Для вычисления тангенса угла наклона луча можно провести следующие преобразования

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\cos \gamma}{n \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \gamma}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{\cos^2 \gamma} - 1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 K^2 + (n^2 - 1)}} \end{aligned} \quad (16)$$

После чего находим

$$x_A = h \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\sqrt{n^2 K^2 + (n^2 - 1)}}. \quad (17)$$

Таким образом, уравнение семейство преломленных лучей описывается уравнением

$$y = h + K(x - x_A) = Kx + h \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 K^2 + (n^2 - 1)}} \right). \quad (18)$$

Далее, в соответствии с общей методикой определения координат точки пересечения близких лучей, найдем ее горизонтальную координату

$$x^* = -h \frac{d}{dK} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 K^2 + (n^2 - 1)}} \right) = h \frac{n^2 - 1}{(n^2 K^2 + (n^2 - 1))^{3/2}}. \quad (19)$$

Подставляя полученное значение в уравнение луча (18), получим вторую координату точки пересечения

$$y^* = -h \frac{d}{dK} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 K^2 + (n^2 - 1)}} \right) = h - h \frac{n^2 K^3}{(n^2 K^2 + (n^2 - 1))^{3/2}}. \quad (20)$$

Отметим, что при взгляде «сверху» (этому соответствует предел $K \rightarrow \infty$) координаты точки-изображения стремятся к следующим значениям

$$x^* \rightarrow 0, \quad y^* \rightarrow h - \frac{h}{n}, \quad (21)$$

Что соответствует известному результату: кажущаяся глубина водоема в n раз меньше истинной глубины.

Вот такая «красивая» алгебра обосновывает проведенные ранее геометрические построения. Признаемся, приведенные в последней части рисунки построены в соответствии с полученными алгебраическими результатами.

Задача 10-1. Сечение рассеяния

Часть 0. Подготовка

0.1. Пренебрегая влиянием поля тяжести, потенциальная энергия частицы до и после соударения постоянна, ее можно считать равной нулю. Так как условие гладкости поверхности говорит о сохранении механической энергии, постоянной окажется кинетическая энергия, откуда следует сохранение модуля полной скорости частицы до и после соударения.

Гладкость поверхности говорит об отсутствии каких-либо сил трения в момент соударения. Пренебрегая силой тяжести, единственная сила, действующая на частицу, – сила реакции со стороны поверхности – направлена по нормали к ней. Используя закон сохранения импульса в проекции на поверхность, приходим к выводу, что проекция скорости частицы на эту поверхность будет сохраняться.

Изобразим векторы скоростей частицы вместе с их проекциями на рисунке 1. Так как $AO = OC$ и $BO = OD$, прямоугольные треугольники ABO и CDO равны, откуда следует равенство углов при вершинах A и C , то есть равенство углов падения φ и отражения φ' .

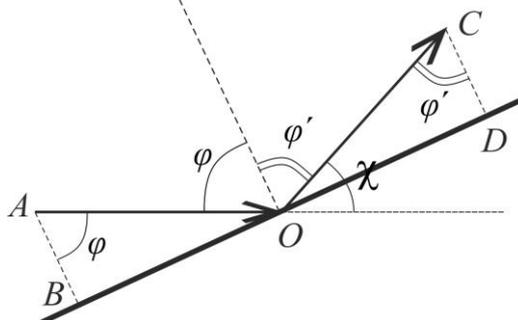


Рисунок 1

0.2. Из рисунка 1 легко получить результат $\chi = \pi - 2\varphi$ в радианах либо $\chi = 180^\circ - 2\varphi$ в градусах.

Важно правильно изобразить угол рассеяния χ на рисунке с учетом того, что это угол между направлениями, но не угол между траекториями до и после соударения. Для того чтобы его безошибочно определить, можно изобразить векторы скоростей частицы до и после столкновения непосредственно в точке O . Угол χ – это угол между указанными векторами. Наконец, подсказкой служит рисунок 1 в условии задачи.

Часть 1. Шар закреплен

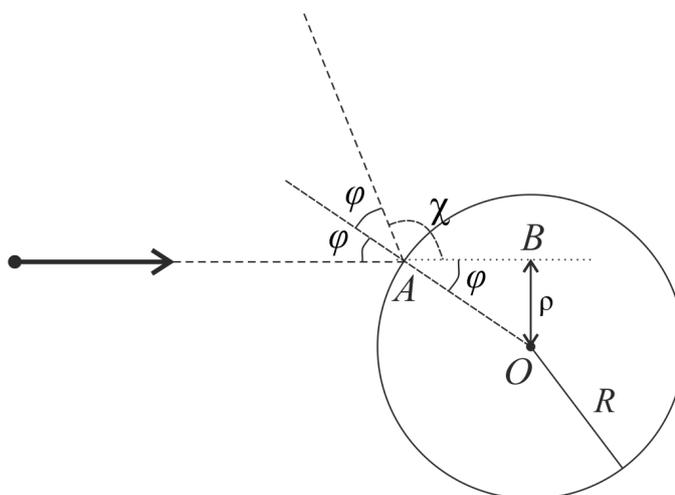


Рисунок 2

1.1. Из треугольника OAB на рисунке 2 видно, что прицельное расстояние ρ связано с углом падения φ следующим выражением: $\rho = R \sin \varphi$. Из результата пункта 0.2 получаем, что $\varphi = (\pi - \chi)/2$, откуда следует:

$$\rho = R \cos \chi/2$$

Можно получить и обратное выражение:

$$\chi = 2 \arccos \frac{\rho}{R}$$

Минимальное и максимальное значение прицельного расстояния ρ для того, чтобы произошло столкновение, равно 0 и R , соответственно. Полученная связь χ и ρ является монотонной на этом интервале. Тогда, вычисляя угол рассеяния на границах интервала, делаем вывод, что он может принимать любое значение, то есть лежать в диапазоне от 0 до π (180°).

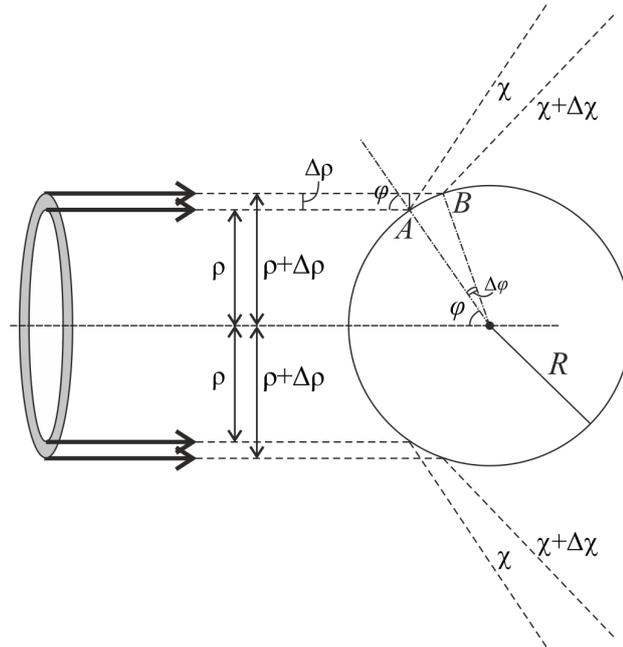


Рисунок 3

1.2. Из полученного выражения видим, что связь ρ и χ однозначная, то есть каждому значению прицельного расстояния соответствует свое значение угла рассеяния. Тогда можно утверждать, что в малом диапазоне углов от χ до $\chi + \Delta\chi$ рассеются те частицы, которые попадут на шар в диапазоне прицельных расстояний от ρ до $\rho + \Delta\rho$ (рисунок 3). Поперечное сечение потока таких частиц представляет собой тонкое кольцо радиусом ρ и толщиной $\Delta\rho$. Площадь такого кольца, учитывая малость $\Delta\rho$, равна $\Delta S = 2\pi\rho\Delta\rho$. Учитывая определение плотности потока частиц из условия задачи и результат пункта 1.1, получаем, что искомое число частиц, которые рассеиваются в единицу времени, равно:

$$\Delta N_\chi = 2\pi j R \cos \frac{\chi}{2} \Delta\rho$$

В данной формуле нам неизвестна величина $\Delta\rho$. Из рисунка 3 ее можно выразить как $\Delta\rho = AB \cos \varphi$. Учитывая малость $\Delta\rho$ и, соответственно, хорды AB , последнюю можно примерно заменить дугой: $AB = R\Delta\varphi$. Наконец, из связи, полученной в пункте 0.2, легко получить: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi - \chi_2}{2} - \frac{\pi - \chi_1}{2} = \frac{\chi_1 - \chi_2}{2} = -\frac{\Delta\chi}{2}$. Знак «минус» здесь означает, что с ростом угла φ угол χ уменьшается. Для наших расчетов длины отрезка $\Delta\rho$ этот знак не нужен, поэтому мы будем брать выражение по модулю. Объединяя выражения, получаем:

$$\Delta\rho = \frac{R\Delta\chi}{2} \cos \varphi = \frac{R\Delta\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2}$$

Откуда искомое число частиц, рассеивающихся в единицу времени, равно:

$$\Delta N_\chi = j\pi R^2 \Delta\chi \cos \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2} = j \frac{\pi R^2}{2} \sin \chi \Delta\chi$$

1.3. Пусть на детектор малой площади ΔS , расположенный на расстоянии l от шара, падают частицы, которые рассеиваются в диапазоне углов от χ до $\chi + \Delta\chi$. На детектор попадет лишь часть таких частиц. В общем случае сечение потока всех таких частиц в некоторый момент времени будет представлять собой кольцо, вырезанное на поверхности сферы (рисунок 4), как и отмечено в условии. Найдем площадь этого кольца.

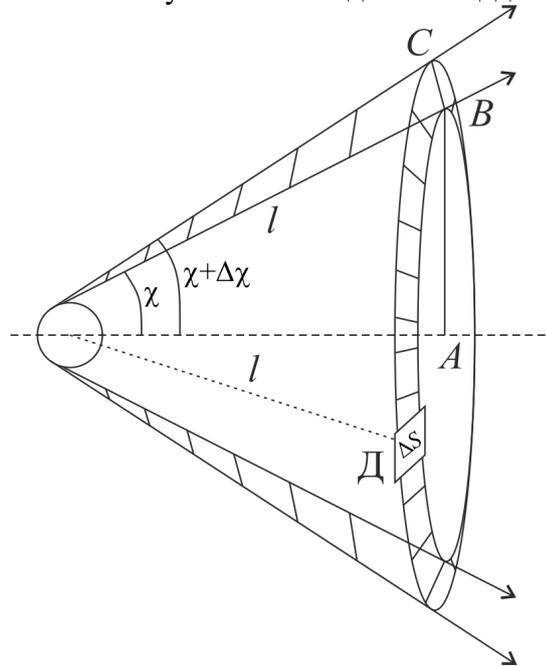


Рисунок 4

Внутренний радиус указанного кольца, как видно из рисунка 4, равен $AB = l \sin \chi$. Фигура вырезана на сфере и, вообще говоря, не лежит в плоскости, однако в силу малости величины ΔS , а, следовательно, и $\Delta\chi$ примерную площадь кольца можно легко рассчитать аналогично расчету в пункте 1.2. Учитывая, что толщина кольца равна $BC = l \Delta\chi$, его площадь будет определяться выражением:

$$\Delta S_\chi = 2\pi \cdot AB \cdot BC = 2\pi l^2 \sin \chi \Delta\chi$$

Полагая, что в указанном тонком кольце поток частиц можно считать примерно постоянным, количество частиц, попадающих в единицу времени на детектор, можно определить простой пропорцией:

$$\Delta N_S = \Delta N_\chi \frac{\Delta S}{\Delta S_\chi} = j \frac{R^2 \Delta S}{4 l^2}$$

1.4. Подставив полученный результат в формулу $\Delta\sigma = \frac{\Delta N}{j}$ и произведя замену $\frac{\Delta S}{l^2}$ на $\Delta\Omega$, получаем:

$$\Delta\sigma = \frac{R^2}{4} \Delta\Omega$$

Полученный результат не зависит от угла рассеяния χ . Это говорит о том, что в любом направлении будет рассеиваться одно и то же количество частиц. Иначе говоря, помещая детектор частиц на одном и том же расстоянии с разных сторон от шара, в единицу времени будет всегда фиксироваться одинаковое количество частиц. Такое рассеяние называют изотропным, то есть не зависящим от направления.

1.5. Формула, полученная в предыдущем пункте, определяет количество частиц, рассеивающихся на малый диапазон около некоторого выбранного угла χ . Если мы хотим просуммировать частицы, вылетающие под всеми углами, постоянная величина $R^2/4$ будет

выносятся за скобки как общий множитель. Сумма по всем малым телесным углам $\Delta\Omega$ даст полный (развернутый) телесный угол, который, как сказано в условии задачи, равен 4π . Получаем:

$$\sigma = \Delta\sigma_{\chi_1} + \Delta\sigma_{\chi_2} + \Delta\sigma_{\chi_3} + \dots = \frac{R^2}{4} 4\pi = \pi R^2$$

Данный результат легко объяснить, если от сечения рассеяния вернуться к количеству частиц, то есть умножить его на плотность потока j . По внешнему виду формулы $j\pi R^2$, можно сказать, что это количество частиц в падающем потоке, пролетающих через площадь поперечного сечения πR^2 , то есть через окружность радиусом R . Но ведь именно столько частиц из падающего потока и попадают хоть в какую-нибудь точку шара (поперечное сечение шара как раз представляет собой окружность радиуса R). Другими словами, просуммировав количество частиц, вылетающих во всех возможных направлениях, мы получили полное количество частиц, падающих на шар. Понимая, что ничего другого не должно было получиться (все падающие частицы должны отлететь от шара), мы подтвердили правильность полученных результатов.

В теории рассеяния величина σ называется полным сечением рассеяния и имеет смысл эффективной площади той области поперечного сечения падающего потока частиц, в которой происходит взаимодействие.

Часть 2. Шар не закреплен

Прежде всего, отметим, что не стоит бояться большого количества шаров вместо одного. Это сделано лишь для того, чтобы по-прежнему большое количество частиц могло столкнуться с шаром (шарами). Ведь если бы шар был один, то после соударений с первой же частицей он отлетел, и, согласно условию, больше не столкнулся ни с одной частицей. С другой стороны, столкновение с любым из шаров, первоначально покоившихся, описывается формулами совершенно одинаково. Поэтому еще раз подчеркнем, не стоит опасаться большого количества шаров.

Далее отметим, что изменится в решении задачи по сравнению с первой частью. Конечно же, по-другому будет происходить столкновение частицы с шаром, ведь последний теперь не закреплен. В силу упругости поверхности механическая энергия системы по-прежнему сохраняется, однако часть кинетической энергии падающей частицы перейдет в кинетическую энергию отлетевшего шара. Следовательно, утверждение о сохранении модуля скорости частицы после столкновения уже не имеет место быть. Получаем, что теперь мы имеем дело с «неоптическим» случаем: угол падения не равен углу отражения! Поэтому в этой части задачи необходимо повторить все действия, сделанные в части 1, с самого начала для нового механизма взаимодействия.

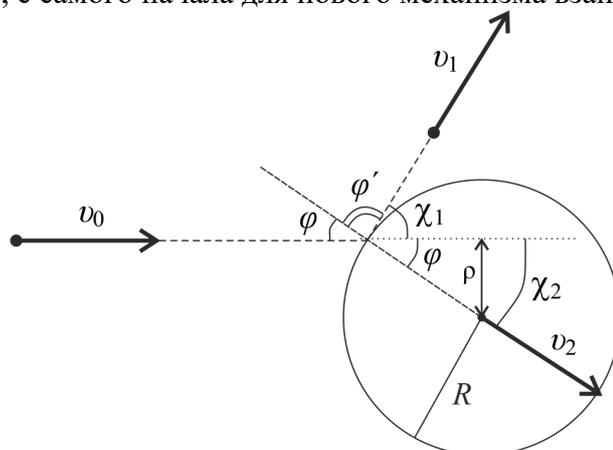


Рисунок 5

2.1 и 2.2. Поверхность шара, по-прежнему, гладкая, поэтому сила взаимодействия между шаром и частицей может быть направлена только по нормали к поверхности в точке соударения. Отсюда следует, что скорость большого шара может быть направлена только

вдоль нормали, то есть под углом падения φ к направлению падающей частицы (рисунок 5). Но ведь это и есть угол рассеяния χ_2 большого шара. Тогда можно проделать все операции, аналогично пунктам 1.1-1.4 для больших шаров. Первым шагом найдем связь прицельного расстояния падающей частицы ρ и углом рассеяния шара χ_2 .

$$\rho = R \sin \varphi = R \sin \chi_2$$

Прицельное расстояние может принимать значения от 0 до R . На этом интервале полученная связь является монотонной. Тогда угол рассеяния будет лежать в диапазоне от 0 до $\pi/2$. То есть ни один шар не отлетит под углом рассеяния, большим, чем $\pi/2$, что, в принципе, понятно из интуитивных соображений.

Аналогично пункту 1.2 можно найти количество шаров, отлетающих в некотором заданном диапазоне углов. Связь ρ и χ_2 здесь используется в том смысле, что на каждую падающую под прицельным расстоянием ρ частицу приходится один шар, отлетевший под углом χ_2 .

$$\Delta N_{\chi_2} = 2\pi j R \sin \chi_2 \Delta \rho = 2\pi j R \sin \chi_2 R \Delta \varphi \cos \varphi = j\pi R^2 \sin 2\chi_2 \Delta \chi_2$$

Вычисления, произведенные в пунктах 1.3 и 1.4 предыдущей части задачи, никак не связаны с характером взаимодействия – они универсальны для любой задачи рассеяния. Объединим их в одно выражение:

$$\Delta \sigma_2 = \frac{\Delta N_{2S}}{j} = \frac{\Delta N_{\chi_2}}{j} \frac{\Delta S}{2\pi l^2 \sin \chi_2 \Delta \chi_2} = \frac{\Delta N_{\chi_2} \Delta \Omega_2}{j 2\pi \sin \chi_2 \Delta \chi_2}$$

Наконец, подставляя результат первого выражения во второе, получаем ответ для пункта 2.2:

$$\Delta \sigma_2 = \begin{cases} R^2 \cos \chi_2 \Delta \Omega_2, & 0 \leq \chi_2 \leq \pi/2 \\ 0, & \chi_2 > \pi/2 \end{cases}$$

Вторая строка в этой записи несет смысл уже оговоренного факта, что ни один шар не отклонится на угол, больший, чем $\pi/2$.

Для того, чтобы найти угол рассеяния налетающих частиц, запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в проекциях. Ось x направим вдоль направления движения частицы до столкновения, ось y – перпендикулярно первой в плоскости рисунка.

$$\begin{cases} \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \\ mv_0 = mv_1 \cos \chi_1 + mv_2 \cos \chi_2 \\ 0 = mv_1 \sin \chi_1 - mv_2 \sin \chi_2 \end{cases}$$

m – масса частицы и шара (они равны друг другу по условию), v_0 – скорость частицы до столкновения, v_1 – скорость частицы после столкновения, v_2 – скорость отлетающего шара. Учитывая равенство масс частицы и шара, выражение можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \\ v_0 = v_1 \cos \chi_1 + v_2 \cos \chi_2 \\ 0 = v_1 \sin \chi_1 - v_2 \sin \chi_2 \end{cases}$$

Получить искомый угол рассеяния χ_1 из данной системы уравнений можно различными способами. Предлагаем возвести второе и третье уравнение в квадрат и сложить друг с другом:

$$\begin{cases} v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \\ v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2 (\cos \chi_1 \cos \chi_2 - \sin \chi_1 \sin \chi_2) \end{cases}$$

Вычитая одно из другого, получаем:

$$0 = v_1 v_2 \cos(\chi_1 + \chi_2)$$

Откуда следует, что $\chi_1 + \chi_2 = \pi/2$. Это известный результат для бильярдных шаров, имеющих равную массу: после столкновения они разлетаются под прямым углом друг к другу.

Понимая, что на каждый отлетевший под углом χ_2 шар приходится одна отклонившаяся на угол $\chi_1 = \pi/2 - \chi_2$ частица, мы можем просто выразить один угол через другой в полученном выше выражении для ΔN_{χ_2} и получить количество рассеянных частиц ΔN_{χ_1} :

$$\Delta N_{\chi_1} = j\pi R^2 \sin(\pi - 2\chi_1) \Delta\chi_1 = j\pi R^2 \sin 2\chi_1 \Delta\chi_1$$

Здесь мы учли, что, в силу полученной между углами связи, $\Delta\chi_1$ и $\Delta\chi_2$ равны друг другу с точностью до знака. Также из связи следует, что угол рассеяния частиц χ_1 изменяется в том же диапазоне, что и χ_2 : от 0 до $\pi/2$. То есть ни одна частица после соударения с шаром не отлетит назад.

Как и для больших шаров, справедливо выражение:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta N_{\chi_1} \Delta\Omega_1}{j2\pi \sin \chi_1 \Delta\chi_1}$$

Отсюда получаем дифференциальное сечение рассеяния для налетающих на шары частиц:

$$\Delta\sigma_1 = \begin{cases} R^2 \cos \chi_1 \Delta\Omega_1, & 0 \leq \chi_1 \leq \pi/2 \\ 0, & \chi_1 > \pi/2 \end{cases}$$

Мы получили интересный результат, что в результате описанных столкновений распределение отлетевших шаров и распределение частиц по углам рассеяния будет одинаковое. При этом количество частиц или шаров будет уменьшаться с увеличением угла χ , под которым расположен детектор.

Задача 10-2. Заряженный стержень

1.1 Выделим на стержне маленький участок $FG = \Delta l$, который виден из точки C под малым углом $\Delta\varphi$ и находится на расстоянии $r = CG$ от точки C , а также на угловом расстоянии φ от отрезка h (см. рис.) С учетом того, что угол HGF также равен φ можем записать

$$\cos\varphi = \frac{h}{GC} = \frac{h}{r} = \frac{GH}{\Delta l} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta l}, \quad (1)$$

откуда следует, что

$$\Delta l = \frac{r^2}{h} \Delta\varphi. \quad (2)$$

Поскольку стержень заряжен равномерно, то на участке стержня Δl находится заряд $\Delta q = \lambda\Delta l$, который, согласно закону Кулона, создаёт в точке C напряженность $\Delta\vec{E}$, равную по модулю

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \frac{r^2}{h} \Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \Delta\varphi. \quad (3)$$

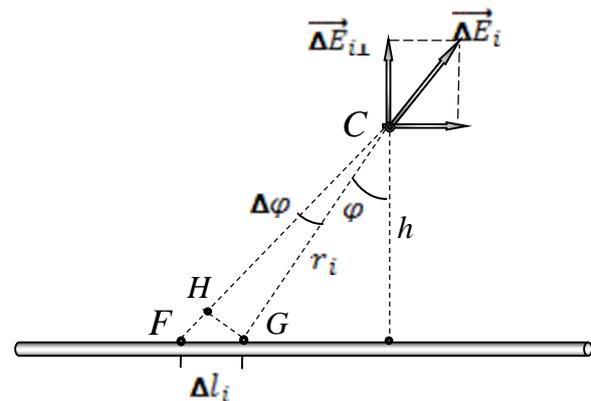
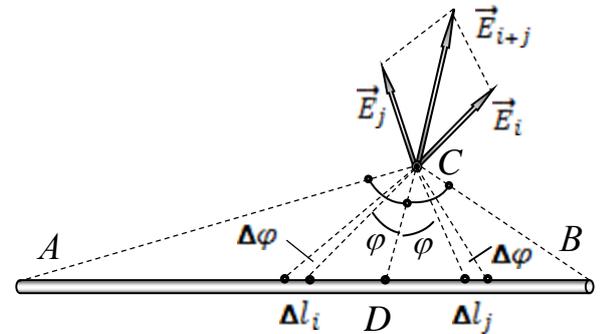
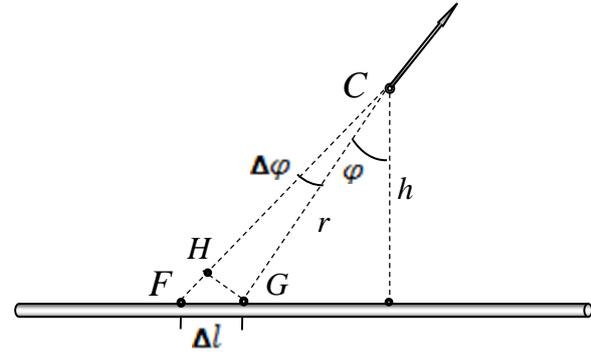
Поскольку для разных участков стержня величины λ и h постоянны, то из (3) следует неожиданный вывод, что $\Delta\vec{E}$ не зависит ни от r , ни от φ , а определяется только малым углом $\Delta\varphi$, под которым данный малый отрезок виден из точки C . Соответственно, из (3) найдем искомое значение коэффициента пропорциональности

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{Кл} \cdot \text{рад}} = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{Кл} \cdot \text{рад}} \quad (4)$$

1.2 Рассмотрим два симметричных (по углу φ) относительно биссектрисы DC малых участка стержня Δl_i и Δl_j , имеющих одинаковую угловую ширину $\Delta\varphi$. Согласно (3), векторы напряженностей \vec{E}_i и \vec{E}_j , создаваемых ими, равны по модулю и симметричны относительно биссектрисы угла. Следовательно, их сумма \vec{E}_{i+j} ориентирована вдоль биссектрисы угла. Заметим, что длины (и заряды!) отрезков Δl_i и Δl_j различны, но согласно (2) большему отрезку соответствует большее расстояние, что и приводит к равенству модулей соответствующих напряженностей.

Разбивая стержень на подобные пары и суммируя их напряженности, приходим к выводу, что напряженность \vec{E} электростатического поля всего стержня также направлена вдоль биссектрисы угла \hat{ACB} .

1.3 Для вычисления нормального компонента \vec{E}_\perp напряженности электростатического поля всего стержня рассмотрим малый элемент стержня длиной Δl_i (Рис.), находящийся на расстоянии r_i от точки наблюдения. Пусть нормальный компонент поля этого



элемента равен $E_{i\perp} = E_i \cos \varphi_i$. Тогда искомая величина E_{\perp} будет представлена суммой

$$E_{\perp} = \sum_i E_{i\perp} = \sum_i E_i \cos \varphi_i . \quad (5)$$

Однако, с учётом (3), сумма значительно упрощается. Действительно, при таком подходе имеем

$$E_{\perp} = \sum_i E_i \cos \varphi_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \cos \varphi_i \Delta \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \sum_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i , \quad (6)$$

сумма $S = \sum_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i$, входящая в выражение (6), представляет собой площадь под

графиком функции $y(x) = \cos(x)$. И, согласно математической подсказке в условии, равна $S = \sum_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i = \sin \varphi$. Заметим, что

геометрический смысл этой суммы – сумма проекций хорд на диаметр окружности. Это замечание вполне позволяет получить математическую подсказку в условии самостоятельно.

Таким образом, часть заряженного стержня, соответствующая углу α в условии, создает нормальную напряженность $E_{\perp\alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \sin \alpha$, а

вторая часть стержня – точно такую же.

$$E_C = 2E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} (\sin \alpha + \sin \alpha) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \sin \alpha . \quad (7)$$

Естественно, что вектор \vec{E}_{\perp} ориентирован перпендикулярно стержню в направлении «от него». Если бы заряд стержня был отрицателен, то направление было бы «к нему».

1.4 Для перехода к полю бесконечного тонкого равномерно заряженного стержня в формуле (7) следует положить $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При этом получаем, что напряженность электростатического поля бесконечного стержня на расстоянии h от него равна по модулю

$$E(h) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \sin \frac{\alpha + \alpha}{2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \quad (8)$$

и направлена перпендикулярно стержню.

1.6 Изобразим скрещивающиеся заряженные стержни на чертеже так, чтобы один из них (создающий поле) был виден в виде точки, а второй (на который действует поле) – находился в плоскости чертежа. На маленький кусочек FG стержня длиной

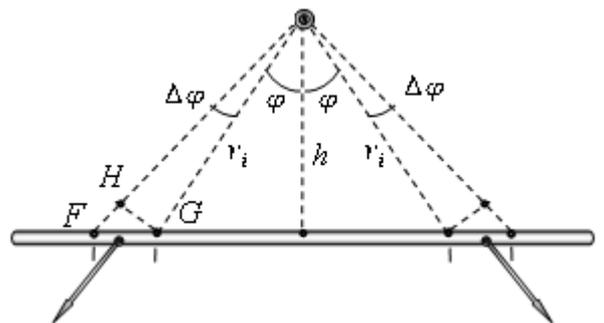
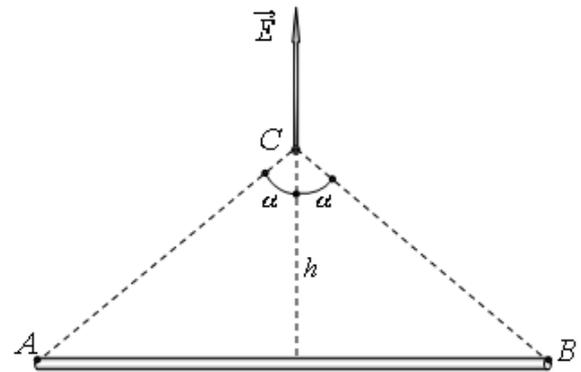
$$FG = \Delta l = \frac{HG}{\cos \varphi} = \frac{r \Delta \varphi}{\cos \varphi} \quad (9)$$

действует сила, определяемая зарядом $\lambda \Delta l$

рассматриваемого кусочка и полем $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ в данной точке пространства.

Поскольку силы, действующие вдоль стержня, будут скомпенсированы, то нам следует искать только силы, перпендикулярные к стержню. Тогда для участка FG можем записать

$$\Delta F = E(r) \lambda \Delta l \cos \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \lambda \frac{r \Delta \varphi}{\cos \varphi} \cos \varphi = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \Delta \varphi . \quad (10)$$



Суммируя (10) по всем кусочкам стержня, найдем величину силы электростатического расталкивания стержней, которая перпендикулярна стержню и ориентирована по продолжению высоты h на рисунке

$$F = \sum_i \Delta F_i = \sum_i \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \Delta\varphi_i = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \sum_i \Delta\varphi_i = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \pi = \frac{\lambda^2}{2\epsilon_0} = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ Н} = 35 \text{ мкН} . \quad (11)$$

Интересно, что сила взаимодействия между заряженными стержнями не зависит от расстояния h между ними. Следовательно, при изменении расстояния h ответ (11) не изменится. Это связано с влиянием двух факторов: при удалении стержней друг от друга поле, естественно, уменьшается, но увеличивается заряд, попадающий на отрезок FG стержня при данном угле $\Delta\varphi$.

Задача 10- 3. Термоэлектрические явления.

Часть 1. Закон Ома.

- 1.1. На каждый ион в металле приходится Z электронов, причём массой электронов в сравнении с массой иона можно пренебрегать. В соответствии с этим

$$n = \frac{N}{V} = \frac{Z \frac{\rho V N_A}{A}}{V} = \frac{Z \rho N_A}{A} = 8,44 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3} . \quad (1)$$

- 1.2. Так как электронный газ считается идеальным, к нему можно применить методы кинетической теории газов, в соответствии с чем

$$\frac{m_e \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3kT}{2} \Rightarrow \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = 1,17 \cdot 10^2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} . \quad (2)$$

- 1.3. В электрическом поле в соответствии со вторым законом Ньютона для электронов

$$e\vec{E} = m_e \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} . \quad (3)$$

Тогда по прошествии времени t после предыдущего столкновения электрон имеет скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} , \quad (4)$$

где \vec{v}_0 — скорость, полученная электроном в результате столкновения. Тогда, учитывая, что среднее время между столкновениями равно времени релаксации, а скорость после столкновения направлена случайным образом, получаем, что

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} \rangle = \langle \frac{e\vec{E}t}{m_e} \rangle = \frac{e\vec{E}(t)}{m_e} = \frac{e\vec{E}\tau}{m_e} . \quad (5)$$

- 1.4. Плотность тока в данном случае найдем

$$\vec{j} = ne\langle \vec{v} \rangle = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (6)$$

по закону Ома. Тогда

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} . \quad (7)$$

- 1.5. С учетом (7) для среднего времени между столкновениями получаем

$$\gamma = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2\tau} \Rightarrow \tau = \frac{m}{ne^2\gamma} = 2,51 \cdot 10^{-14} \text{ с} . \quad (8)$$

Часть 2. Закон Джоуля-Ленца.

- 2.1. Найдем среднюю энергию, передаваемую электроном кристаллической решетке за одно столкновение. Если \vec{v}_1 — скорость электрона сразу после столкновения, а \vec{v}_0 — непосредственно перед ним, то

$$H = \frac{m_e}{2} ((v_1)^2 - (v_0)^2) \quad (9)$$

Выражение для \vec{v}_1 удобно привести к виду

$$\langle v_1^2 \rangle = \left\langle \left(\vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} \right)^2 \right\rangle \approx \langle v_0^2 \rangle + 2 \left(\frac{eE}{m_e} \right)^2 \langle t^2 \rangle = \langle v_0^2 \rangle + 2 \left(\frac{eE\tau}{m_e} \right)^2$$

из которого следует искомое значение

$$\langle v_1^2 \rangle = \left\langle \left(\vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m_e} \right)^2 \right\rangle = \langle v_0^2 \rangle + \left(\frac{eE}{m_e} \right)^2 \langle t^2 \rangle = \langle v_0^2 \rangle + 2 \left(\frac{eE\tau}{m_e} \right)^2 \Rightarrow H = \frac{(eE\tau)^2}{m_e} \quad (10)$$

2.2. Тогда мощность, выделяемую в единице объёма, можно найти как

$$w = \frac{n}{\tau} H = \frac{n\tau(eE)^2}{m_e} = \sigma E^2 = 5,95 \cdot 10^{11} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3} \quad (11)$$

Как следует из закона Ома в дифференциальной форме

$$j = \sigma E \Rightarrow P = \frac{j^2}{\sigma} LS, \quad (12)$$

где L и S — длина и площадь сечения стержня соответственно. Тогда

$$w = \frac{(jS)^2}{\sigma S} L \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{\sigma} j^2 \quad (13)$$

Часть 3. Закон Видемана - Франца.

3.1. Перенос теплоты осуществляется за счёт того, что электроны, пришедшие из областей с более высокой температурой, сталкиваясь с ионами в областях с меньшей температурой, отдают им больше энергии, чем получают от них. Рассмотрим некоторое поперечное сечение внутри металла. В среднем половина электронов приходит в эту точку со стороны положительного направления оси x , а половина — со стороны отрицательного.

Тогда плотность потока теплоты, обусловленная электронами, пришедшими со стороны отрицательного направления оси x с проекцией скорости v_x равна

$$q_-(x) = \frac{1}{2} n_x v_x \cdot \frac{3}{2} kT(x - v_x \tau), \quad (14)$$

а с положительного —

$$q_+(x) = -\frac{1}{2} n_x v_x \cdot \frac{3}{2} kT(x + v_x \tau), \quad (15)$$

где n_x — концентрация электронов с проекцией скорости v_x .

Тогда полная плотность потока теплоты для электронов с проекцией скорости v_x равна

$$q(x) = \frac{3}{4} k n_x v_x (T(x - v_x \tau) - T(x + v_x \tau)) \quad (16)$$

Предполагая, что температура меняется незначительно на длине свободного пробега электрона, получаем, что

$$T(x \pm v_x \tau) \approx T(x) \pm v_x \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) \Rightarrow q(x) = -\frac{3}{2} k n_x v_x^2 \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) \quad (17)$$

Тогда полная плотность потока теплоты

$$q(x) = - \sum \frac{3}{2} kn_x v_x^2 \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) = - \frac{3}{2} kn(v_x^2) \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) = - \frac{1}{2} kn(v^2) \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x), \quad (18)$$

так как $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$.

3.2. Для теплопроводности металла (меди) получаем следующее значение

$$\kappa = \frac{1}{2} kn(v^2) \tau = 1,99 \cdot 10^2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}. \quad (19)$$

3.3. Численное значение постоянной Лоренца найдем из формулы подсказки

$$L = \frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 1,12 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{Ом} \cdot \text{К}^{-2}. \quad (20)$$

Часть 4. Эффект Томсона.

4.1. Рассуждения в данном пункте практически полностью повторяют оные из пункта 2.1. Действительно, при этом

$$\langle v_Q \rangle = \left\langle \frac{1}{2} (v_x(x - v_x \tau) - v_x(x + v_x \tau)) \right\rangle = - \langle \tau v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \rangle \quad (21)$$

С учетом правил работы с бесконечно малыми величинами, данное выражение можно преобразовать как

$$\langle v_Q \rangle = - \langle \tau v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \rangle = - \left\langle \frac{\tau \Delta v_x^2}{2 \Delta x} \right\rangle = - \frac{\tau \Delta \langle v_x^2 \rangle}{2 \Delta x} = - \frac{\tau \Delta \langle v^2 \rangle}{6 \Delta x} = - \frac{k \tau \Delta T}{2 m_e \Delta x}. \quad (22)$$

4.2. Пусть электрон испытывает одно столкновение в точке с координатой $x - d$, а второе — в точке с координатой x . Тогда выделение теплоты во втором столкновении равно

$$Q = \frac{m_e}{2} (\langle v_1 \rangle^2 - \langle v_0 \rangle^2) = \frac{m_e}{2} \left(2 \left(\frac{e E \tau}{m_e} \right)^2 + \langle v_0(x - d) \rangle^2 - \langle v_0(x) \rangle^2 \right). \quad (23)$$

Полученное выражение можно привести к виду

$$\langle v_0(x - d) \rangle^2 - \langle v_0(x) \rangle^2 = - \frac{\Delta \langle v_0(x) \rangle^2}{\Delta x} (d) = - \frac{3k \Delta T}{m_e \Delta x} (v_{0x} \tau + \frac{e E \tau^2}{2 m_e}) = - \frac{3k e E \tau^2 \Delta T}{m_e^2 \Delta x}, \quad (24)$$

Откуда следует, что

$$p = \frac{(e E \tau)^2}{m_e} - \frac{3k e E \tau^2 \Delta T}{2 m_e \Delta x}. \quad (25)$$

Численное значение дает

$$p = - \frac{3n k e E \tau \Delta T}{2 m_e \Delta x} = - \frac{3n k e E \tau}{2 m_e} \lambda = 7,71 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}. \quad (26)$$

4.3. Из формулы (25) следует, что мощность дополнительной теплоты Томсона пропорциональна плотности тока и градиенту температур, причем коэффициент пропорциональности равен

$$\mu = - \frac{3k}{2e}. \quad (27)$$

Задача 11-1 Измерение скорости звука с помощью осциллографа.

Часть 1. Изменение фигуры.

1.1 Уравнение звуковой волны, распространяющейся от динамика, имеет традиционный вид

$$p = A \cos(\omega t - kx) = A \cos\left(2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)\right). \quad (1)$$

1.2 Сигналы, которые подаются на входы осциллографа, описываются функциями

$$\begin{aligned} U_x &= A \cos \omega t \\ U_y &= A \cos(\omega t - kl) \end{aligned} \quad (2)$$

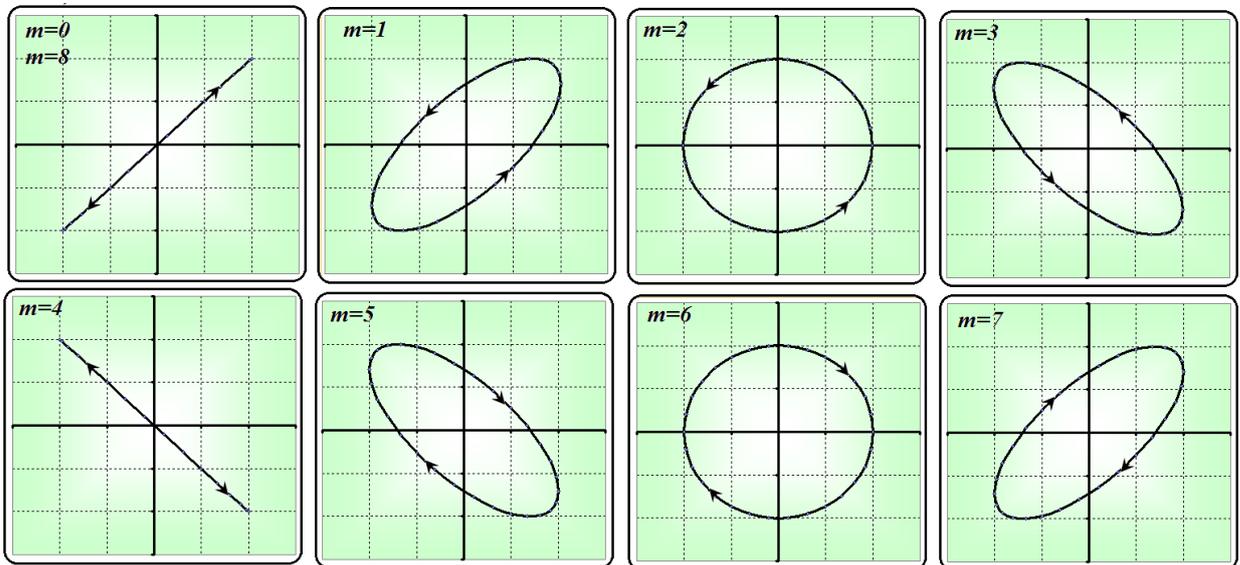
1.3 Выражение для сигнала, снимаемого с микрофона и подаваемого на вход Y. Удобно представить в виде

$$U_y = A \cos(\omega t - kl) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} m \frac{\lambda}{8}\right) = A \cos\left(\omega t - m \frac{\pi}{4}\right) \quad (3)$$

Тогда уравнение траектории луча в параметрическом виде имеет вид

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t \\ y &= A \cos\left(\omega t - m \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Траектория, описываемая этими уравнениями в общем случае является эллипсом, который при $m=0$ и $m=4$ вырождается в отрезок прямой, а при $m=2$ и $m=6$ является окружностью. Последовательность этих траекторий при различных m показана на рисунке.



Часть 2. Движение выреза.

2.1 Так как сдвиг фаз между колебаниями вдоль перпендикулярных осей равен $\frac{\pi}{2}$, то траекторией луча будет окружность.

2.2 Угловой размер образующегося выреза можно определить из условия его образования $U_z > U_{пор.}$. Из которого следует, что угловые границы выреза удовлетворяют условию

$$\cos \varphi = 0,9 \Rightarrow \Delta \varphi = 2 \arccos 0,9 = 0,90 \approx 52^\circ. \quad (5)$$

2.3 Не сложно сообразить, что вырез делает полный оборот, если микрофон смещается на расстояние равное длине волны звука. На это требуется время

$$T = \frac{\lambda}{V} = \frac{1}{\nu} \frac{c}{V}. \quad (6)$$

Следовательно, угловая скорость движения выреза равна

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V}{\nu c}. \quad (7)$$

2.4 При частоте генератора $\nu = 600 \text{ Гц}$ и скорости движения микрофона $V = 2,5 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$ вырез делает полный оборот за время $\tau = 220 \text{ с}$. Определите по этим данным скорость звука в воздухе.

Из формулы (6) следует, что

$$c = \nu V \tau = 600 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 220 = 330 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (8)$$

Задача 11-2. Аквариум

1.1 Если шарик находится в центре сосуда, то все лучи выходящие от него будут пересекать стенки сферического аквариума по нормали, следовательно, без изменения направления распространения. Поэтому при наблюдении с любой стороны при любом показателе преломления изображение шарика также будет находиться в центре шара.

1.2 Ход лучей показан на рисунке 1. Видно, что изображение **A** предмета **B** находится на глубине h , меньшей, чем действительная глубина H .

Применим теорему синусов к $\triangle OBC$:

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin(180^\circ - \alpha - \gamma)} \Rightarrow$$

$$\frac{R-H}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha + \gamma)}.$$

Поскольку углы α , β и γ малые, то $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin(\alpha + \gamma) \approx \alpha + \gamma \Rightarrow$

$$\frac{R-H}{\alpha} = \frac{R}{\alpha + \gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{H\alpha}{R-H}.$$

Совершенно аналогично рассматривая $\triangle OAC$,

получим: $\gamma = \frac{h\beta}{R-h}$. Приравняем правые части

выражений, полученных для γ :

$$\frac{H\alpha}{R-H} = \frac{h\beta}{R-h} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{h}{H} \cdot \frac{R-H}{R-h}.$$

Используя закон преломления света, получим: $\frac{1}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{h}{H} \cdot \frac{R-H}{R-h} \Rightarrow$

$$h = \frac{HR}{nR - (n-1)H}.$$

Введем безразмерный параметр $x = \frac{H}{R}$. В результате: $h = \frac{H}{n - (n-1)x}$ или

$$y = \frac{h}{R} = \frac{x}{n - (n-1)x}.$$

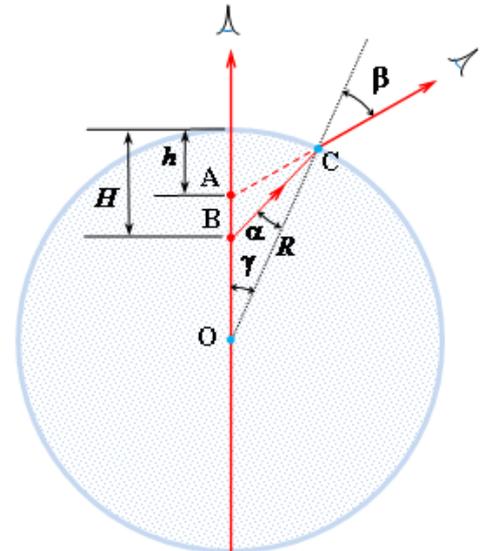


Рис. 1

1.3 Ход лучей в этом случае показан на рисунке 2. Видно, что изображение предмета находится на глубине, большей, чем действительная глубина. Ход решения в этом случае аналогичен.

Применим теорему синусов к ΔBOC :

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{H-R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \gamma}.$$

Поскольку углы α , β и γ малые, то $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \gamma \approx \gamma \Rightarrow$

$$\frac{H-R}{\alpha} = \frac{R}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{R\alpha}{H-R}.$$

Применяя теорему синусов к ΔAOC , получим:

$$\frac{AO}{\sin \beta} = \frac{OC}{\sin \delta} \Rightarrow \frac{h-R}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \delta}.$$

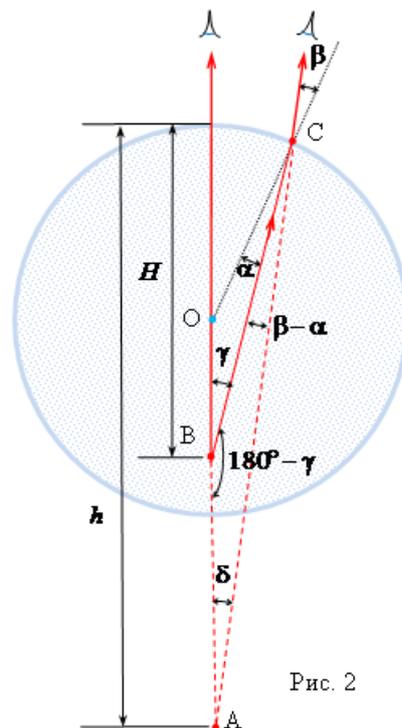


Рис. 2

На рисунке 2 видно, что в ΔAOC $\delta = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) - (\beta - \alpha) = \gamma - \beta + \alpha$.

В результате: $\frac{h-R}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin(\gamma - \beta + \alpha)} \Rightarrow \gamma - \beta + \alpha = \frac{R\beta}{h-R}$.

Подставляя выражение для γ и используя закон преломления $\frac{1}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta}$, получим:

$$\frac{R}{H-R} \alpha - \alpha n + \alpha = \frac{R}{h-R} \alpha n \Rightarrow h = \frac{HR}{nR - (n-1)H}$$

или

$$y = \frac{h}{R} = \frac{x}{n - (n-1)x},$$

что совпадает с формулой полученной для случая, когда тело было выше центра шара.

1.4 Графики полученных зависимостей показаны на рисунке 3. При $n = 2,5$ эта график этой зависимости терпит разрыв и устремляется к $y \rightarrow \pm\infty$. Физический смысл этого явления можно понять: шарик переходит через фокус сферической поверхности.

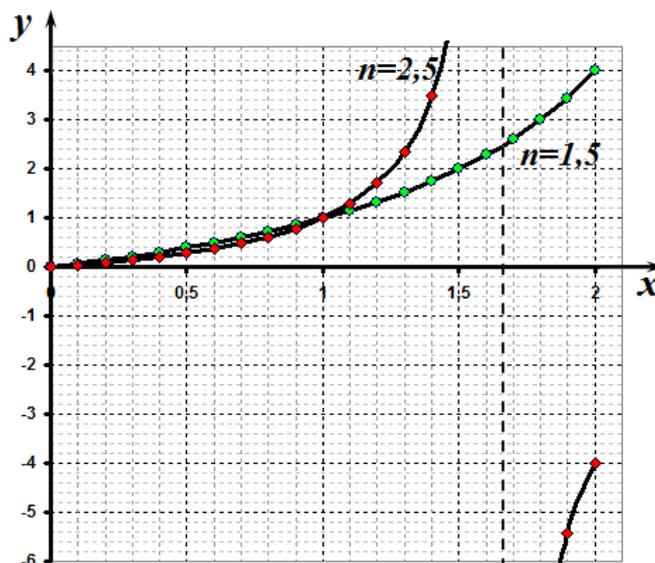


Рис. 3

1.5. Для вычисления видимой скорости движения шарика следует вычислить производную

от видимой координаты $u = \frac{dh}{dt}$. Т.к. $h = \frac{HR}{nR - (n-1)H}$, то

$$u = \frac{(nR - (n-1)H)R + HR(n-1)}{(nR - (n-1)H)^2} v \Rightarrow u = \frac{nR^2}{(nR - (n-1)H)^2} \Rightarrow$$

В безразмерных координатах эта зависимость имеет вид

$$\chi = \frac{n}{(n - (n-1)x)^2}.$$

Графики этих функций показаны на рис. 4

1.6 График этих зависимостей показан на рисунке 4. Эта функция также терпит разрыв в указанной точке. Но скорость движения изображения шарика все время остается положительной.

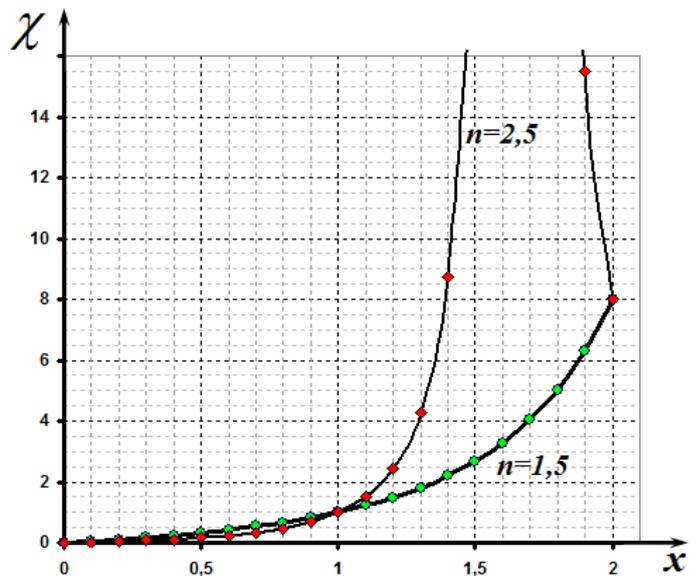


Рис. 4

Часть 2.

2.1 В общем случае положение изображения зависит от точки наблюдения. Поэтому в данной части задачи нельзя пользоваться результатами, полученными в первой части задачи. Для построения изображения надо построить, по крайней мере, два луча и найти их точку пересечения.

Направим ось X вдоль линии наблюдения. В этой системе шарик движется под углом 45° к осям координат. Рассмотрим положение шарика в момент времени непосредственно предшествующий его прохождению через центр, когда его координаты равны $x = a$, $y = a$, причем величина a является малой. В качестве первого луча возьмем луч, попадающий на стенку в точке $x = 0$. Построение этого луча понятно из

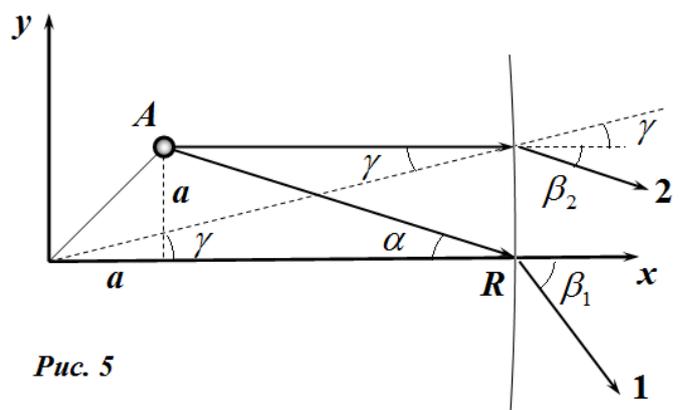


Рис. 5

рисунка 5. Полагая все углы малыми находим угол, под которым выходит преломленный луч.

$$\beta_1 = n\alpha = n \frac{a}{R-a}. \quad (1)$$

Уравнения этого луча имеет вид

$$y = -\frac{na}{R-a}(x-R) \quad (2)$$

Второй луч направим параллельно оси X . Для этого луча также не сложно найти уравнение:

Из закона преломления и геометрических построений следует, что угол наклона преломленного луча равен

$$\beta_2 + \gamma = n\gamma \Rightarrow \beta_2 = (n-1)\gamma \quad (3)$$

где $\gamma = \frac{a}{R}$. Тогда уравнение этого луча имеет вид

$$y = a - \frac{(n-1)a}{R}(x-R). \quad (4)$$

Изображением шарика является точка пересечения этих лучей. Координаты этой точки являются результатом совместного решения уравнений (2) и (4). Аккуратное решение этой системы уравнений приводит к следующему результату.

$$\begin{aligned} x &= R - R \frac{R-a}{R+(n-1)a} \\ y &= \frac{nRa}{R+(n-1)a} \end{aligned} \quad (5)$$

Далее необходимо упростить данные выражения, полагая $a \ll R$. В формуле для координаты y можно пренебречь a в знаменателе:

$$y \approx na \quad (6)$$

Для координаты x следует проделать следующие преобразования

$$x = R - R \frac{R-a}{R+(n-1)a} = R \left(1 - \frac{1 - \frac{a}{R}}{1 + (n-1)\frac{a}{R}} \right) \approx R \left(1 - \left(1 - \frac{a}{R} - n-1 \right) \frac{a}{R} \right) \approx na. \quad (7)$$

Таким образом, мы получили, что координаты изображения просто в n раз больше действительных координат шарика. Следовательно, все кинематические характеристики движения изображения шарика (в т.ч. и вектор скорости) так же будут в $n=1,5$ больше соответствующих характеристик движения самого шарика. Таким образом. Вектор скорости видимого движения совпадает по направлению с вектором \vec{V} , но его длина в полтора раза больше.

Задача 11 - 3 Равновесие и устойчивость звёзд.

1.1 Средняя плотность звезды рассчитывается «по определению»

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 1 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (1)$$

1.2 Так как плотность звезды предлагается считать постоянной, то изменение давления при изменении расстояния до центра звезды на величину Δr описывается «гидростатической» формулой

$$\Delta P = -\rho g \Delta r. \quad (2)$$

Так как ускорение свободного падения зависит от расстояния до центра по закону

$$g(r) = g_0 \frac{r}{R}, \quad (3)$$

где $g_0 = G \frac{M}{R^2}$ - ускорение на поверхности звезды, то уравнение (2) приобретает вид

$$\Delta P = -\frac{\rho g_0}{R} r \Delta r. \quad (4)$$

Проводя суммирование по тонким сферическим слоям и, учитывая, что на поверхности давление равно нулю, получим

$$P_0 - \frac{\rho g_0}{R} \frac{R^2}{2} = 0 \quad (5)$$

Откуда следует, что давление в центре звезды оценивается по формуле

$$P_0 = \frac{\rho g_0}{R} \frac{R^2}{2} = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \approx 1 \cdot 10^{14} \text{ Па} \quad (5)$$

1.3 Для оценки температуры можно воспользоваться уравнением состояния идеального газа (с учетом, что молярная масса газа равна $\mu = m_p N_A$)

$$P_0 = \frac{\rho}{m_p N_A} R_G T \Rightarrow \bar{T} = P_0 \frac{m_p}{\rho k} = \frac{\rho g_0 R}{2} \frac{m_p}{\rho k} = \frac{m_p}{2k} G \frac{M}{R} \approx 1 \cdot 10^7 \text{ К}. \quad (6)$$

1.1 Для оценки будем считать, что ускорение свободного падения в мало изменяется при погружении на 10% радиуса и равно ускорению свободного падения на поверхности. Тогда из закона равноускоренного движения можно получить искомую оценку времени падения

$$0,1R = \frac{g_0 t_H^2}{2} \Rightarrow t_H = \sqrt{\frac{0,2R^3}{GM}} \approx 8 \cdot 10^2 \text{ с} \quad (7)$$

1.2 Тепловая энергия звезды оценивается по формуле

$$W_E = \frac{3}{2} kT \cdot 2 \frac{M}{m_p} = 3 \frac{M}{m_p} kT \approx 6 \cdot 10^{41} \text{ Дж}, \quad (8)$$

Здесь учтено, что электроны имеют такую же энергию, как и протоны.

В единицу времени звезда излучает с поверхности энергию, равную

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_s^4 \approx 4 \cdot 10^{26} \text{ Вт}. \quad (9)$$

Тогда оценка теплового времени дается формулой

$$t_T = 0,1 \frac{W_T}{L} \approx 1,5 \cdot 10^{14} \text{ с} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ лет}. \quad (10)$$

1.3 Ядерное время звезды t_N оценивается аналогично. Ядерная энергия, выделяющаяся в результате ядерных реакций равна

$$W_N = 0,1 M \beta c^2 \approx 2 \cdot 10^{44} \text{ Дж} \quad (11)$$

Поэтому

$$t_N = 0,1 \frac{W_N}{L} \approx 5 \cdot 10^{16} \text{ c} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ лет}. \quad (12)$$

Часть 2. Анализ равновесия звёзд

2.1 В данном случае нет необходимости находить полную формулу для гравитационной энергии, достаточно только определить вид зависимости, который проще всего найти с помощью метода размерностей. Простой анализ показывает, что искомая зависимость должна иметь вид

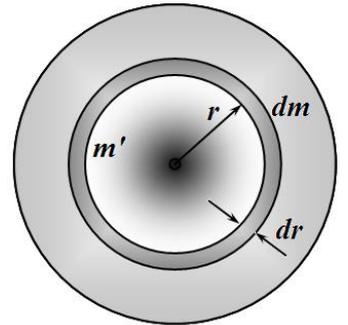
$$W_G = -\alpha G \frac{M^2}{R}, \quad (13)$$

Где α - безразмерный коэффициент. Так как гравитационная энергия есть энергия притяжения, то она является отрицательной.

Примечание. При необходимости можно рассчитать и точное численное значение этого коэффициента. Для этого выделим внутри однородного шара тонкий сферический слой радиуса r и толщиной dr . Гравитационная энергия взаимодействия этого слоя с шаром определяется по формуле

$$W_G = -G \frac{m' dm}{r}.$$

где $m' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = M \frac{r^3}{R^3}$ - масса части шара, находящейся под



рассматриваемым слоем, $dm = 4\pi r^2 dr \rho = 3M \frac{r^2 dr}{R^3}$ - масса выделенного слоя. Подставим эти значения в формулу для гравитационной энергии и проведем элементарное интегрирование по всем слоям, в результате получим

$$W_G = -\int_0^R G \frac{m' dm}{r} = -3GM^2 \int_0^R \frac{r^3}{R^3} \frac{r^2 dr}{R^3} \frac{1}{r} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}.$$

2.2 Полная энергия звезды состоит из ее внутренней энергии, определяемой формулой (1), приведенной в условии задачи, и гравитационной энергией, найденной в предыдущем пункте:

$$W = M\varepsilon + W_G = M \left(K(T) \rho^{\gamma-1} + L(T) \right) - \alpha G \frac{M^2}{R}, \quad (14)$$

Теперь необходимо выразить плотность звезды через ее массу и радиус:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} \quad (15)$$

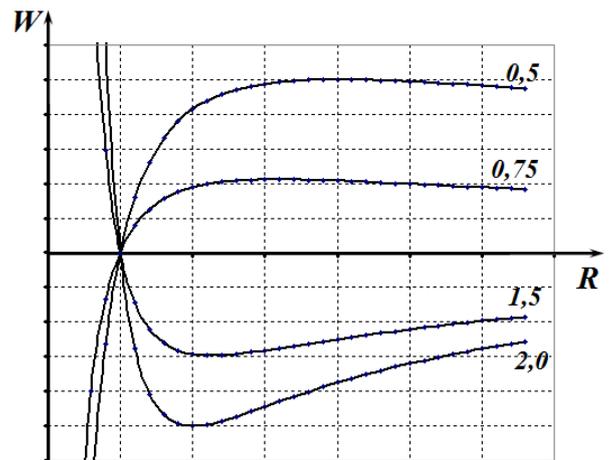
Окончательное выражение для энергии принимает вид

$$\begin{aligned} W &= M\varepsilon + W_G = M \left(K(T) \left(\frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} \right)^{\gamma-1} + L(T) \right) - \alpha G \frac{M^2}{R} = \\ &= A \frac{M^\gamma}{R^{3\gamma-3}} - B \frac{M^2}{R} + C \end{aligned} \quad (16)$$

где A, B, C - некоторые положительные величины, не зависящие от массы и радиуса планеты, причем последнее постоянное слагаемое может быть опущено.

Схематический вид зависимости $W(R)$ легко установить, рассматривая поведение функции в предельных случаях $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$. Простой анализ показывает, что при $3\gamma - 3 > 1$ данная функция имеет точку минимума, в противном случае она имеет точку максимума.

Для примера на рисунке показаны графики функции $W = \frac{1}{R^\alpha} - \frac{1}{R}$, при различных значениях показателя степени α , которые приведены на рисунке.



2.3 Чтобы положения равновесия (ему соответствуют точки экстремума энергии) было устойчивым необходимо, чтобы функция имела минимум энергии. В нашем случае, как это следует из анализа зависимости $W(R)$, это условие достигается при

$$3\gamma - 3 > 1 \Rightarrow \gamma > \frac{4}{3}. \quad (17)$$

2.4 Чтобы получить зависимость массы звезды от ее плотности (помните, что радиус звезды не является постоянным!) достаточно выразить ее радиус

$$R = \sqrt[3]{\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho}} = \beta M^{\frac{1}{3}} \rho^{-\frac{1}{3}} \quad (18)$$

И подставить его в выражение для полной энергии (16)

$$W = A \frac{M^\gamma}{R^{3\gamma-3}} - B \frac{M^2}{R} = A' M \rho^{\gamma-1} - B' M^{\frac{5}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}, \quad (19)$$

2.5 Условие устойчивого равновесия и в этом варианте может быть сформулировано аналогично – функция $W(\rho)$ должна иметь точку минимума.