

**Республиканская физическая олимпиада
2023 года
(Заключительный этап)**

Теоретический тур

Решения задач



Республиканская физическая олимпиада 2023 года (Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач 9 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Термометр Галилея. (Решение).

Часть 1. Тепловое расширение.

1.1 Все линейные размеры, в том числе и радиус отверстия увеличатся, поэтому площадь отверстия также **увеличится**. Изменение площади отверстия равно

$$\Delta S = (Rb(1 + \alpha\Delta t))^2 - b^2 \approx 2b\alpha\Delta t. \quad (1)$$

1.2 Рассмотрим куб с длиной ребра a_0 , изготовленный из рассматриваемого материала. Длина ребра куба изменяется по закону

$$a = a_0(1 + \alpha\Delta t). \quad (2)$$

Тогда объем куба станет равным

$$V = a^3 = a_0^3(1 + \alpha\Delta t)^3 \approx V_0(1 + 3\alpha\Delta t). \quad (3)$$

При нагревании тела его масса не изменяется, поэтому плотность тела станет равной

$$\rho = \frac{m}{V_0(1 + 3\alpha\Delta t)} \approx \frac{m}{V_0}(1 - 3\alpha\Delta t) = \rho_0(1 - 3\alpha\Delta t).$$

Здесь мы использовали приближенную формулу $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$. Из сравнения с формулой, приведенной в условии, находим, что

$$\gamma = -3\alpha. \quad (4)$$

Часть 2. Массы поплавков.

2.1 Поплавок находится в равновесии, если сила тяжести уравновешивается выталкивающей силой Архимеда. При увеличении температуры плотность воды уменьшается, поэтому уменьшается сила Архимеда, поэтому шарик начнет **тонуть**.

2.2 Плавать будут те поплавки, для которых температура всплытия, больше температуры воды, а утонут те, у которых указанная на бирках температура меньше температуры воды. Поэтому температура воды лежит в диапазоне от максимальной среди плавающих поплавков, до минимальной среди утонувших поплавков. В качестве измеренной температуры можно взять **среднее значение этих температур**. В качестве оценки погрешности разумно взять **половину разности этих температур**.

2.3 При температуре всплытия сила тяжести шарика уравновешивается силой Архимеда, которая изменяется при изменении температуры:

$$mg = F_A \quad (5)$$

Сила Архимеда рассчитывается по формуле

$$F_A = \rho_0 V g = \frac{V g}{v_0}, \quad (6)$$

Здесь

$$V = V_{\text{шарик}} + V_{\text{бирки}} = \frac{\pi D^3}{6} + \frac{m_1}{\rho_1}. \quad (7)$$

- объем поплавок с биркой.

Теоретический тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

Из этих формул, следует, что масса поплавок с биркой должна быть равна

$$m_0 + m_1 = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\pi D^3}{6} + \frac{m_1}{\rho_1} \right) \quad (8)$$

Из этого уравнения находим необходимую массу бирки

$$m_1 = \frac{\frac{1}{v_0} \frac{\pi D^3}{6} - m_0}{\left(1 - \frac{1}{\rho_1 v_0} \right)} \quad (8)$$

2.4. При учете теплового расширения стеклянного поплавок, формула (8) преобразуется к виду (связанному с изменением диаметра поплавок)

$$m_1 = \frac{\frac{1}{v_0} \frac{\pi D^3}{6} (1 + 3\alpha(t - t_0)) - m_0}{\left(1 - \frac{1}{v_0 \rho_1} \right)} \quad (9)$$

Из формул (8) -(9) следует, что массу каждой бирки следует увеличить на

$$\Delta m_1 = \frac{\frac{\pi D^3}{6 v_0}}{\left(1 - \frac{1}{v_0 \rho_1} \right)} 3\alpha(t - t_0) \quad (10)$$

Результаты расчетов масс бирок и их изменения, проведенные по формулам (8) и (9) приведены в Таблице.

Таблица результатов расчетов.

| $t, ^\circ C$ | $\rho \frac{г}{см^3}$ | $m, г$ | $\Delta m, мг$ |
|---------------|-----------------------|--------|----------------|
| 15 | 0,99913 | 0,195 | -0,609 |
| 20 | 0,99823 | 0,191 | 0,000 |
| 25 | 0,99707 | 0,186 | 0,608 |
| 30 | 0,99567 | 0,180 | 1,214 |
| 35 | 0,99406 | 0,173 | 1,817 |

2.5 Общая масса золота равна сумме всех чисел в 2 последних столбцах данной таблицы. Она равна

$$m = 0,922г \quad (11)$$

Задание 2. Как измеряли Вселенную. Решение.

Часть 1. Радиус Земли.

1.1 Элементарный построения условия видимости приводят к уравнению, следующему из теоремы Пифагора

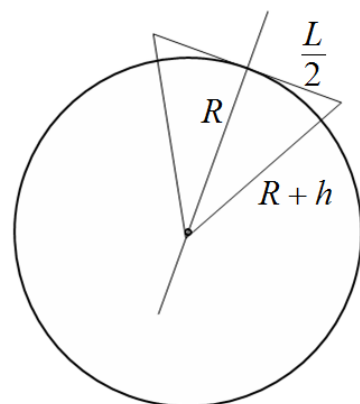
$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = (R+h)^2 - R^2 \approx 2Rh. \quad (1)$$

Мы пренебрегли малым слагаемым h^2 . Из этой формулы следует, что радиус Земли равен

$$R = \frac{L^2}{8h}. \quad (2)$$

Численный подсчет дает результат

$$R \approx 6,3 \cdot 10^6 \text{ м}. \quad (3)$$



Часть 2. Масса Земли.

2.1 Из закона всемирного тяготения можно записать формулу для ускорения свободного падения

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}. \quad (4)$$

Из этой формулы находим массу Земли $M = \frac{g_0 R^2}{G} = 5,9 \cdot 10^{24} \text{ кг}$.

Средняя плотность Земли равна

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3g_0}{4\pi R G} = 5,55 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (5)$$

Часть 3. Расстояние до Луны.

3.1 Расстояние от Земли до Луны можно найти r , рассматривая движение Луны с точки зрения законов динамики (2 закон Ньютона и закон всемирного тяготения):

$$m\omega^2 r = G \frac{mM}{r^2}. \quad (6)$$

Где m - масса Луны, M - масса Земли, $\omega = \frac{2\pi}{T_L}$ - угловая скорость движения Луны вокруг

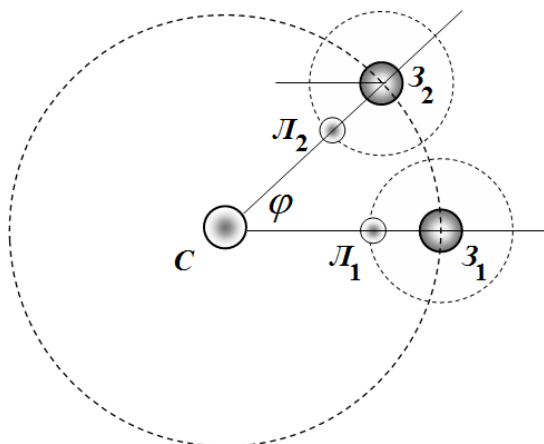
Земли. Для упрощения расчетов можно использовать формулу (4):

$$\left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2 r = \frac{g_0 R^2}{r^2}. \quad (7)$$

Из этой формулы находим радиус лунной орбиты

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2}}. \quad (8)$$

Теперь необходимо учесть, что время между двумя новолуниями не равно периоду обращения Луны вокруг Земли. Обозначим T_3 период обращения Земли вокруг Солнца (1 год). На рисунке показано положение Солнца, Земли и Луны в два последовательных новолуния. Очевидно, что время между полнолуниями (которые легче наблюдать) равно времени между новолуниями. За время между новолуниями τ Луна по своей орбите повернется на угол $\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_3} \tau\right)$, поэтому можно записать:



$$\tau = \frac{\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_3} \tau\right)}{\omega_L} = \frac{\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_3} \tau\right)}{2\pi} T_L. \quad (9)$$

Из этой формулы следует, что период обращения Луны описывается формулой:

$$\frac{1}{T_L} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_3}. \quad (10)$$

Подставляя это выражение в формулу (8) получим

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(2\pi \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_3}\right)\right)^2}}. \quad (11)$$

Для численных расчетов необходимо подставить все значения в системе СИ:

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(2\pi \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_3}\right)\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,81 \frac{M}{c^2} (6,5 \cdot 10^6 \text{ м})^2}{\left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \left(\frac{1}{29,5} + \frac{1}{365,25}\right)\right)^2}} = 3,9 \cdot 10^8 \text{ м}. \quad (12)$$

Часть 4. Масса Солнца.

4.1 Запишем второй закон Ньютона (в совокупности с законом всемирного тяготения) для движения Земли

$$m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = G \frac{mM}{R^2}. \quad (13)$$

Где m - масса Земли, M - масса Солнца, R - радиус земной орбиты, $T = 1 \text{ год}$ - период обращения Земли вокруг Солнца. Из этого уравнения выразим массу Солнца

$$M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R^3}{G}. \quad (14)$$

Радиус орбиты найдем из данных радиолокационных измерений

$$R = c \frac{\tau}{2}. \quad (15)$$

Окончательно для массы Солнца получим

$$M = \frac{1}{G} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{c\tau}{2}\right)^3. \quad (16)$$

Подставим численные значения и вычислим

$$M = \frac{1}{G} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{c\tau}{2}\right)^3 = \frac{1}{6,67 \cdot 10^{-11}} \left(\frac{2\pi}{365,25 \cdot 24 \cdot 3600}\right)^2 \left(\frac{3 \cdot 10^8 \cdot 16,7 \cdot 60}{2}\right)^3 = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ кг}.$$

Задание 3. Изменение мощности. Решения.

Часть 1. Один реостат.

Мощность электроплитки рассчитывается по формуле $P = \frac{U_0^2}{R}$. Поэтому в относительных единицах эта величина равна

$$p = \frac{U_0^2 R_0}{R U_0^2} = \frac{1}{r}. \quad (1)$$

1.1 Так как вторая часть реостата «закорочена», то «работает» только его первая часть, поэтому сопротивлением между клеммами равно

$$R = R_0 \frac{x}{l}. \quad (2)$$

Или в относительных единицах

$$r = z. \quad (3)$$

Тогда мощность плитки равна

$$p = \frac{1}{z}. \quad (4)$$

1.2 В этом случае ситуация обратная, поэтому

$$r = 1 - z. \quad (5)$$

И мощность

$$p = \frac{1}{1 - z}. \quad (6)$$

1.3 Не сложно заметить, что в данном случае два участка реостата подключены к клеммам параллельно, поэтому общее сопротивление равно

$$R = \frac{R_x(R_0 - R_x)}{R_0}. \quad (7)$$

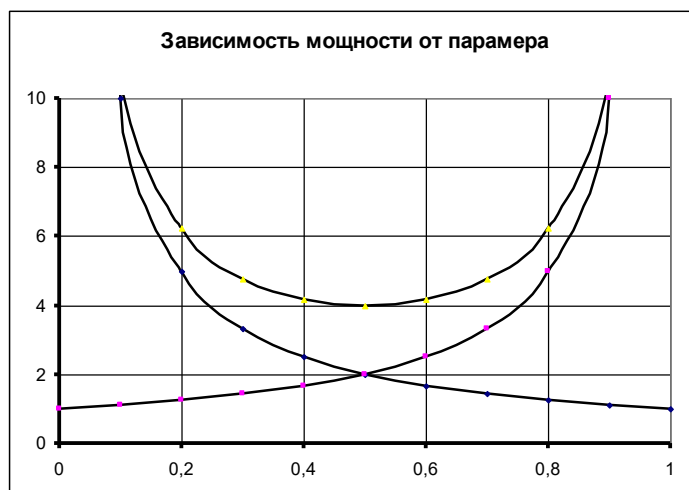
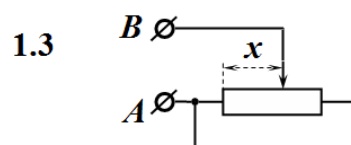
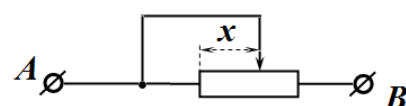
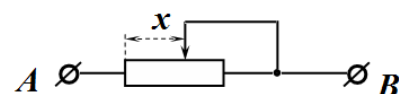
В относительных единицах эта функция имеет вид

$$r = z(1 - z). \quad (8)$$

Формула для мощности имеет вид

$$p = \frac{1}{z(1 - z)}. \quad (9)$$

Графики этих функция показаны на рисунке.



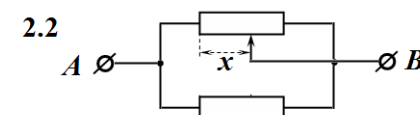
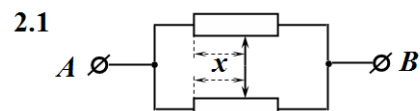
Часть 2. Два реостата.

2.1 В этой схеме электрический ток через переключку не идет, поэтому мы имеем два параллельно соединенных реостата. Общее сопротивление не зависит от положения движков реостата и равно

$$R_{AB} = \frac{R_0}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow p = z. \quad (10)$$

2.2 В этой схеме параллельно соединены участок первого реостата и полностью второй реостат. Сопротивление такой схемы равно

$$R_{AB} = \frac{R_0 R_x}{R_0 + R_x} \Rightarrow r = \frac{z}{1+z} \Rightarrow p = \frac{1+z}{z}. \quad (11)$$



Часть 3. Нелинейный реостат.

3.1 Зависимость сопротивления цепи от величины x описывается функцией

$$R_{AB} = \frac{R(x)(R_0 - R(x))}{R_0}. \quad (12)$$

В этом выражении величина R_0 также неизвестна. Однако ее можно найти, анализируя зависимость R_{AB} от $R(x)$. Как следует из выражения (8) эта функция достигает максимума при $R(x) = \frac{R_0}{2}$, при этом

$$(R_{AB})_{\max} = \frac{R(x)(R_0 - R(x))}{R_0} = \frac{\frac{R_0}{2} \left(R_0 - \frac{R_0}{2} \right)}{R_0} = \frac{R_0}{4}. \quad (13)$$

В таблице 1 находим, что $(R_{AB})_{\max} = 25,0 \text{ Ом}$. Следовательно,

$$R_0 = 100 \text{ Ом}. \quad (14)$$

3.2 Теперь уравнение (8) можно переписать в безразмерных параметрах

$$r_{AB} = r(z)(1 - r(z)). \quad (15)$$

Данное уравнение является квадратным относительно функции $r(z)$:

$$r^2 - r + r_{AB} = 0. \quad (16)$$

Полное решение этого уравнения задается выражениями:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4r_{AB}}}{2} \\ r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4r_{AB}}}{2} \end{cases}. \quad (17)$$

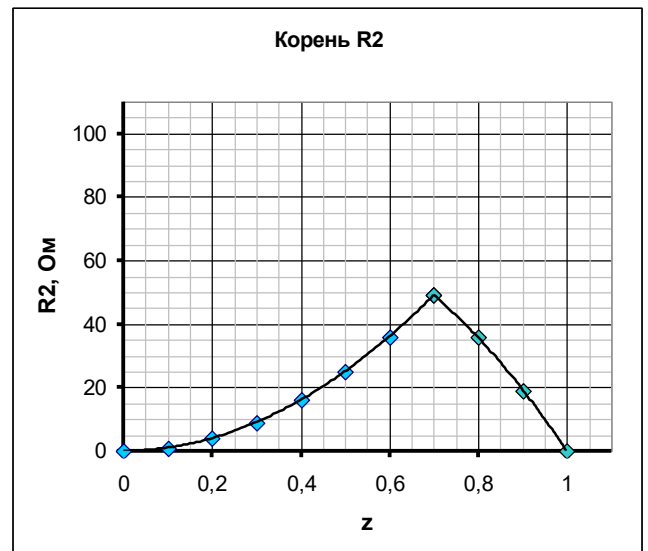
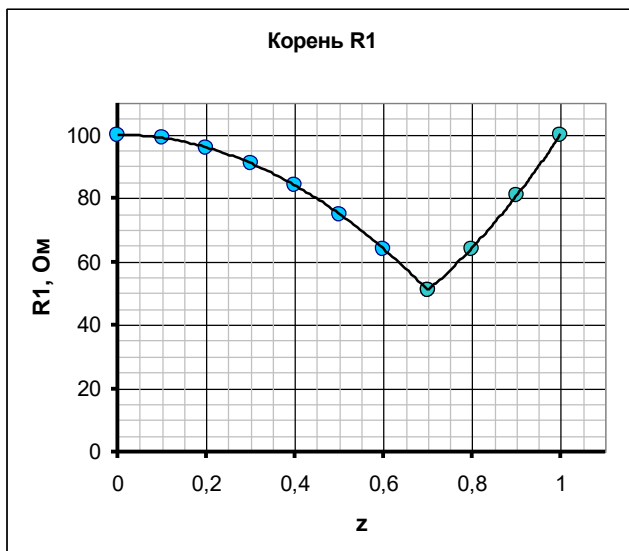
В Таблице приведены значения корней уравнения (8) в зависимости от параметра z (корни безразмерного уравнения (12) рассчитаны по формулам (13)).

Теоретический тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

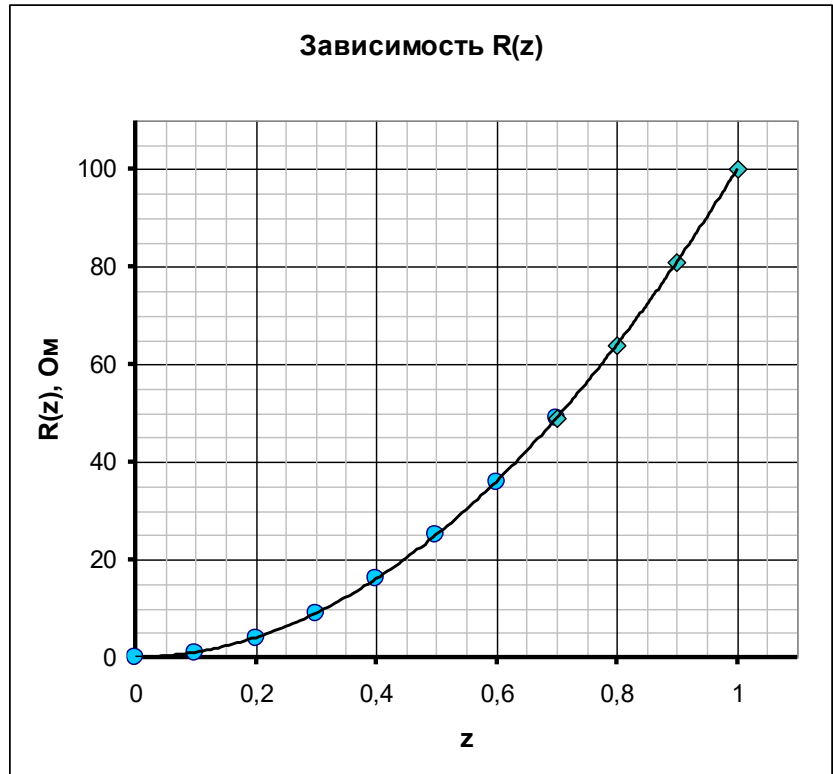
| z | $R_{AB}, \text{ Ом}$ | $r_{AB} = \frac{R_{AB}}{R_0}$ | $R_1 = R_0 r_1$ | $R_2 = R_0 r_2$ |
|-----|----------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------|
| 0,0 | 0,0 | 0,000 | 100,00 | 0,00 |
| 0,1 | 1,0 | 0,010 | 99,00 | 1,00 |
| 0,2 | 3,8 | 0,038 | 96,00 | 4,00 |
| 0,3 | 8,2 | 0,082 | 91,00 | 9,00 |
| 0,4 | 13,4 | 0,134 | 84,00 | 16,00 |
| 0,5 | 18,8 | 0,188 | 75,00 | 25,00 |
| 0,6 | 23,0 | 0,230 | 64,00 | 36,00 |
| 0,7 | 25,0 | 0,250 | 51,00 | 49,00 |
| 0,8 | 23,0 | 0,230 | 64,00 | 36,00 |
| 0,9 | 15,4 | 0,154 | 81,00 | 19,00 |
| 1,0 | 0,0 | 0,000 | 100,00 | 0,00 |

Ниже показаны графики этих рассчитанных значений.



По своему физическому смыслу полученная функция должна быть монотонно возрастающей, так сопротивление никакого участка реостата не может быть отрицательным. Поэтому, полученные решения надо правильно сшить, как показано в таблице и на графике.

| z | $R(z)$, Ом |
|-----|-------------|
| 0,0 | 0,0 |
| 0,1 | 1,0 |
| 0,2 | 4,0 |
| 0,3 | 9,0 |
| 0,4 | 16,0 |
| 0,5 | 25,0 |
| 0,6 | 36,0 |
| 0,7 | 49,0 |
| 0,8 | 64,0 |
| 0,9 | 81,0 |
| 1,0 | 100,0 |



3.3 Легко заметить, что данная функция является квадратичной (значения сопротивлений – квадраты целых чисел) и описывается формулой

$$R(z) = R_0 z^2. \quad (18)$$

3.4 График зависимости мощности реостата от параметра z имеет вид, показанный на рисунке.





Республиканская физическая олимпиада 2023 года (Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач 10 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Термоскоп Галилея. Решение.

Часть 1. Конструирование и градуировка в идеальном случае.

1.1 – 1.2 Масса воздуха в термоскопе остается постоянной, поэтому для этого воздуха справедливо уравнение состояния Клапейрона (для состояний при максимальной и минимальной температурах):

$$\frac{P_0(V_1 + Sl)}{T_{\max}} = \frac{(P_0 - \rho gl)V_1}{T_{\min}}, \quad (1)$$

Где $Sl = \frac{\pi d^2}{4}l$ - внутренний объем трубки.

Из уравнения (1) находим:

$$\begin{aligned} \frac{(V_1 + Sl)}{V_1} &= \frac{(P_0 - \rho gl) T_{\max}}{P_0 T_{\min}} \Rightarrow 1 + \frac{Sl}{V_1} = (1 - \alpha) \frac{T_{\max}}{T_{\min}} \Rightarrow \\ \frac{Sl}{V_1} &= (1 - \alpha) \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1 \Rightarrow V_1 = \frac{Sl}{(1 - \alpha) \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1} \end{aligned} \quad (2)$$

Численные расчеты приводят к результатам

$$\begin{aligned} Sl &= \frac{\pi d^2}{4}l = \frac{\pi \cdot 0,5^2}{4}50 = 9,82 \text{ см}^3 \\ \alpha &= \frac{\rho gl}{P_0} = \frac{1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,50}{1,0 \cdot 10^5} = 5,0 \cdot 10^{-3} \\ V_1 &= \frac{Sl}{(1 - \alpha) \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1} = \frac{9,82 \text{ см}^3}{(1 - 0,050) \frac{40 + 273}{10 + 273} - 1} = 194 \text{ см}^3 \\ \beta &= \frac{Sl}{V_1 + Sl} = 0,048 \end{aligned} \quad (3)$$

1.3 Запишем уравнение Клапейрона для воздуха в трубке, используя начальное и промежуточное состояния

$$\frac{P_0(V_1 + Sl)}{T_{\max}} = \frac{(P_0 - \rho gh)(V_1 + Sl - Sh)}{T} \quad (4)$$

Перепишем его в «безразмерной» форме

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_{\max}} &= \left(1 - \frac{\rho gl}{P_0} \cdot \frac{h}{l}\right) \left(1 - \frac{Sl}{(V_1 + Sl)} \cdot \frac{h}{l}\right) \Rightarrow \\ \frac{T}{T_{\max}} &= (1 - \alpha z)(1 - \beta z) \end{aligned} \quad (5)$$

Это уравнение является квадратным относительно величины z :

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a = \alpha\beta; \quad b = -(\alpha + \beta); \quad c = 1 - \frac{T}{T_{\max}} = 1 - \frac{t + 273}{313}, \quad (5)$$

которое может быть решено по известной формуле

$$z = \frac{(\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta\left(\frac{40-t}{313}\right)}}{2\alpha\beta} \quad (6)$$

Отметим, что необходимо выбрать знак «минус» перед корнем.

1.4 Результаты расчетов приведены в таблице 1 и на графике.

Таблица 1. Зависимость высоты подъема от температуры без учета влажности воздуха.

| $t^{\circ}\text{C}$ | a | b | c | z |
|---------------------|---------|----------|---------|--------------|
| 10,00 | 0,00241 | -0,09826 | 0,09585 | 1,000 |
| 15,00 | 0,00241 | -0,09826 | 0,07987 | 0,830 |
| 20,00 | 0,00241 | -0,09826 | 0,06390 | 0,661 |
| 25,00 | 0,00241 | -0,09826 | 0,04792 | 0,494 |
| 30,00 | 0,00241 | -0,09826 | 0,03195 | 0,328 |
| 35,00 | 0,00241 | -0,09826 | 0,01597 | 0,163 |
| 40,00 | 0,00241 | -0,09826 | 0,00000 | 0,000 |



Замечания.

1. В данном случае можно рассчитать (что заметно проще) обратную зависимость $t(z)$ непосредственно по формуле (5).
2. Квадратное уравнение (5) можно решить приближенно, пренебрегая произведением $\alpha\beta$. В этом приближении получается практически та же зависимость.

Часть 2. Реальные измерения.

2.1 В этом случае суммарное давление газов в термостате равно сумме давлений сухого воздуха и давления водяного пара. Давление сухого воздуха подчиняется уравнению состояния, т.к. масса сухого воздуха остается неизменной. А давление водяного пара есть давление насыщенного водяного пара, зависящее только от температуры (и не зависящее от занимаемого объема). Поэтому при высоте уровня воды в сосуде h , связь между различными давлениями определяется уравнением равновесия столба воды

$$P_0 = P + P_{нас.} + \rho gh, \quad (7)$$

Откуда следует, что давление сухого воздуха равно

$$P = P_0 - P_{нас.} - \rho gh, \quad (8)$$

Уравнение Клапейрона для сухого воздуха в этом случае имеет вид:

$$\frac{(P_0 - P_{нас.}(t_{max})) \cdot (V_1 + Sl)}{T_{max}} = \frac{(P_0 - P_{нас.}(t) - \rho gh)(V_1 + Sl - Sh)}{T}. \quad (9)$$

Или в безразмерных параметрах:

$$\frac{\left(1 - \frac{P_{нас.}(t_{max})}{P_0}\right)}{T_{max}} = \frac{\left(1 - \frac{P_{нас.}(t)}{P_0} - \frac{\rho gl h}{P_0 l}\right) \left(1 - \frac{Sl h}{V_1 + Sl l}\right)}{T} \Rightarrow$$

$$(1 - \gamma_{max}) \frac{T}{T_{max}} = (1 - \gamma - \alpha z)(1 - \beta z) \quad (10)$$

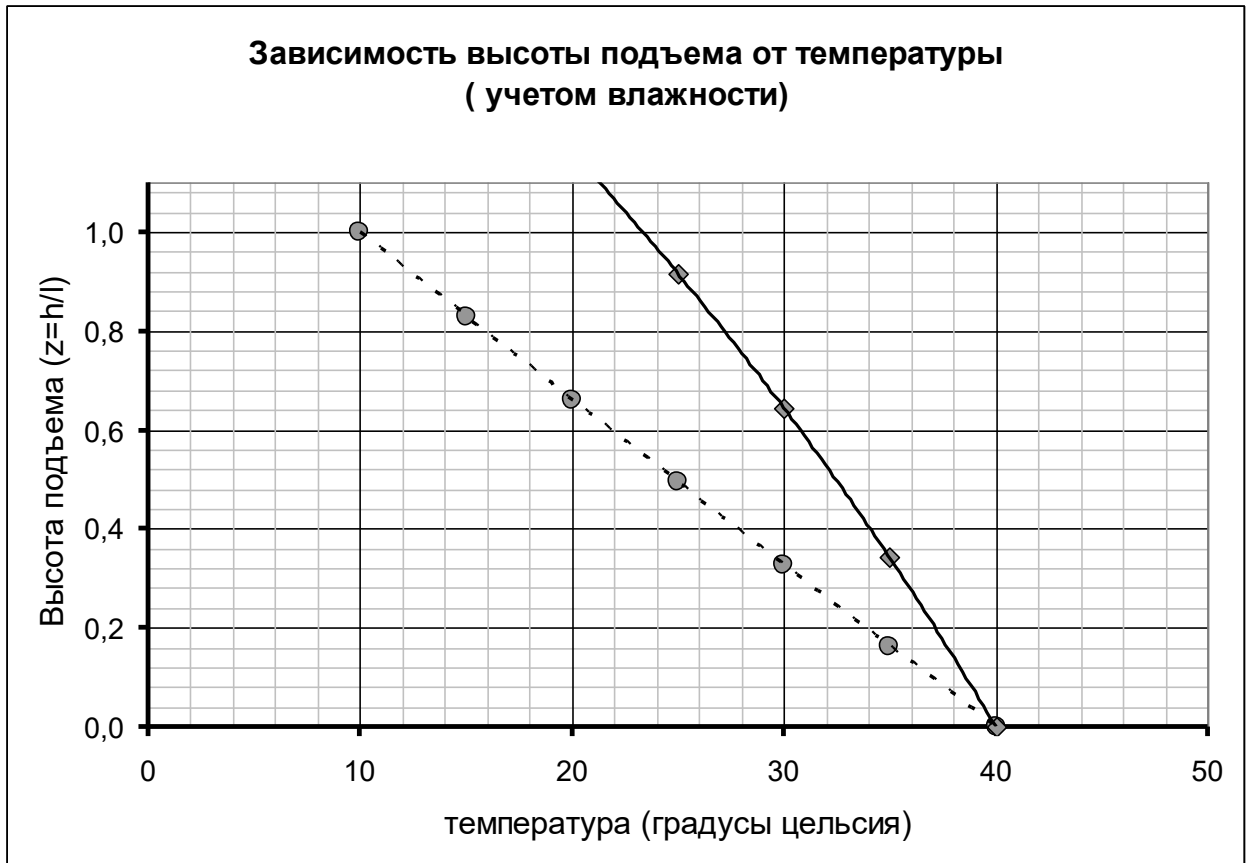
Это уравнение также приводится к квадратному уравнению типа (5) с параметрами

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a = \alpha\beta; \quad b = -(\alpha + \beta(1 - \gamma)); \quad c = (1 - \gamma) - (1 - \gamma_{max}) \frac{T}{T_{max}}. \quad (11)$$

Результаты расчетов всех параметров уравнения (11) и его решение представлены в Таблице 2.

| $t, ^\circ\text{C}$ | $P, \text{кПа}$ | γ | a | b | c | z |
|---------------------|-----------------|----------|---------|----------|---------|--------------|
| 10,00 | 1,228 | 0,01228 | 0,00241 | -0,09767 | 0,15030 | 1,602 |
| 15,00 | 1,706 | 0,01706 | 0,00241 | -0,09744 | 0,13073 | 1,390 |
| 20,00 | 2,339 | 0,02339 | 0,00241 | -0,09713 | 0,10961 | 1,162 |
| 25,00 | 3,169 | 0,03169 | 0,00241 | -0,09673 | 0,08651 | 0,915 |
| 30,00 | 4,246 | 0,04246 | 0,00241 | -0,09621 | 0,06095 | 0,644 |
| 35,00 | 5,627 | 0,05627 | 0,00241 | -0,09554 | 0,03234 | 0,341 |
| 40,00 | 7,381 | 0,07381 | 0,00241 | -0,09470 | 0,00000 | 0,000 |



Для наглядности на графике оставлена зависимость, рассчитанная без учета давления водяных паров. Естественно, что полученная зависимость имеет смысл только при $z \leq 1$.

Задание 2. Капельница Кельвина. Решение.

1. Если заряд сферы равен Q , то ее потенциал равен

$$\varphi = k \frac{Q}{R}, \quad (1)$$

Где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Поэтому разность потенциалов между кольцами равна

$$\Delta\varphi = 2k \frac{Q}{R}. \quad (2)$$

Тогда электрический заряд каждого кольца равен (из определения емкости конденсатора):

$$C = \frac{Q_1}{\Delta\varphi} \Rightarrow Q_1 = C\Delta\varphi = \frac{2kC}{R} Q. \quad (3)$$

2. Так как верхний сосуд заземлен, то потенциал всех его точек (в том числе и капель) равен нулю. Потенциал капли равен сумме потенциалов поля, создаваемых зарядом на ближайшем кольце, и поля, создаваемого зарядом на самой капле. Потенциал поля кольца в точке нахождения капли легко определить, используя принцип суперпозиции:

$$\varphi_1 = k \frac{Q_1}{\sqrt{r^2 + h^2}}. \quad (4)$$

Такой же по модулю (но противоположный по знаку) потенциал создается зарядом на капле

$$\varphi_1 = k \frac{q}{a}. \quad (5)$$

Приравнивая эти выражения, находим заряд капли

$$q = \frac{a}{\sqrt{r^2 + h^2}} Q_1 = \frac{a}{\sqrt{r^2 + h^2}} \frac{2kC}{R} Q. \quad (6)$$

Из этой формулы следует, что безразмерный коэффициент пропорциональности между зарядом капли и зарядом сосуда равен

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{r^2 + h^2}} \frac{2kC}{R}. \quad (7)$$

3. Пусть после попадания $(N-1)$ капель заряд сосуда равен Q_{N-1} , тогда после падения очередной капли заряд сосуда станет равным

$$Q_N = Q_{N-1} + q = Q_{N-1} + \alpha Q_{N-1} = (1 + \alpha) Q_{N-1}. \quad (8)$$

Из этого выражения следует, что заряд сосуда возрастает в геометрической прогрессии, поэтому

$$Q_N = (1 + \alpha)^N Q_0. \quad (9)$$

Задание 3. Диск на рельсах. Решение.

Часть 1. Динамика вращательного движения.

1.1 Уравнение (1) можно получить различными способами. Например, рассмотрим малый промежуток времени Δt . Изменение кинетической энергии диска равно работе силы трения, поэтому

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{4}\right) = -2F_{mp.}v\Delta t. \quad (1)$$

Изменение кинетической энергии за малый промежуток времени преобразуем следующим образом

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{4}\right) = \frac{m}{4}((v + \Delta v)^2 - v^2) = \frac{m}{2}v\Delta v, \quad (2)$$

мы пренебрегли малым слагаемым $(\Delta v)^2$. Подстановка этого выражения в уравнение (1) приводит к требуемому результату

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -4 \frac{F_{mp.}}{m}. \quad (3)$$

1.2 В рассматриваемом случае

$$F_{mp.} = \frac{1}{2} \mu mg \quad (4)$$

Поэтому

$$R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = -2 \mu g. \quad (5)$$

Так как угловое ускорение постоянно, то угловая скорость изменяется по закону

$$\omega = \omega_0 - 2 \frac{\mu g}{R} t. \quad (6)$$

Из этой функции находим время, за которое угловая скорость уменьшается вдвое:

$$\frac{\omega_0}{2} = \omega_0 - 2 \frac{\mu g}{R} t \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\omega_0 R}{4 \mu g}. \quad (7)$$

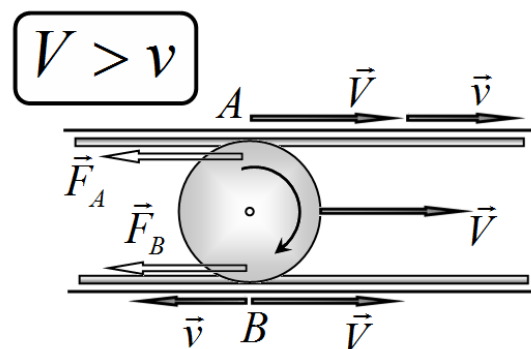
1.3 Полное число оборотов до остановки проще выразить из уравнения (1):

$$\frac{mR^2 \omega_0^2}{4} = \mu mg \cdot (2\pi RN) \Rightarrow N = \frac{R \omega_0^2}{8 \mu g}. \quad (8)$$

Часть 2. Движение диска по рельсам.

2.1 Сила трения направлена в сторону противоположную относительной скорости точек соприкосновения тел. Поэтому направления сил трения, действующих на диск со стороны разных рельсов, зависят от соотношения между скоростями поступательного V и вращательного v движения крайних точек диска.

Если $V > v$, то эти крайние точки движутся в одну



Теоретический тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

сторону, поэтому обе силы трения направлены в сторону, противоположную вектору V . В этом случае скорость поступательного движения будет уменьшаться по закону

$$V = V_0 - a_1 t = V_0 - \mu g t, \quad (9)$$

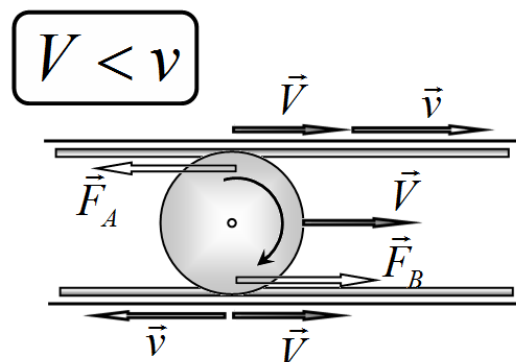
Здесь обозначено $a_1 = \mu g$ - модуль ускорения для поступательного движения.

Так как силы трения направлены в одну сторону, то суммарный момент силы трения равен нулю, поэтому **угловая скорость вращения изменяться не будет**.

Иная ситуация реализуется при $V < v$.

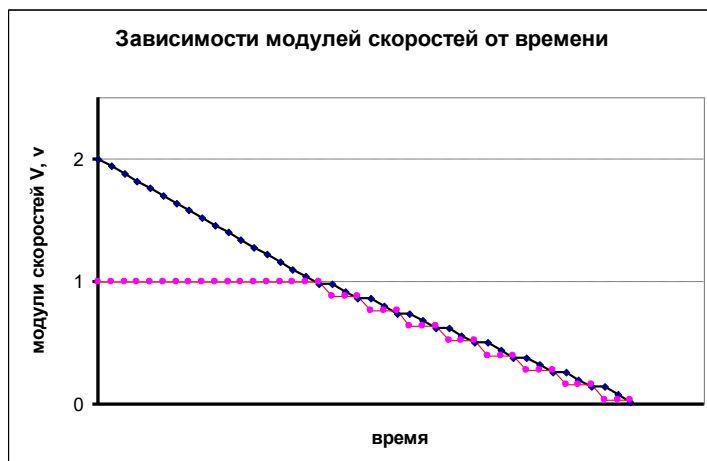
В этом случае силы трения, действующие на крайние точки диска, будут направлены в противоположные стороны. Тогда **скорость поступательного движения изменяться не будет**, а скорость вращательного движения будет изменяться в соответствии с формулой (6):

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 - 2 \frac{\mu g}{R} t \Rightarrow \\ v &= \omega_0 R - a_2 t = \omega_0 R - 2 \mu g t \end{aligned} \quad (10)$$



Здесь $a_2 = 2\mu g$ - модуль ускорения вращательного движения. Движение с точным совпадением скоростей $V = v$ невозможно. Поэтому при $V \approx v$ движение диска будет носить более сложный характер, в какие малые промежутки времени при $V > v$ будет уменьшаться скорость поступательного движения (а вращательного сохраняться), в другие промежутки времени при $V < v$ будет сохраняться скорость поступательного движения, а скорость вращательного движения уменьшаться. Такое попеременное движение усреднено можно представить, как движение с некоторым средним ускорением.

На основании проведенных рассуждений графики зависимости скоростей от времени будут иметь вид: в течение некоторого промежутка времени t_1 скорость поступательного движения будет уменьшаться, а скорость вращательного движения оставаться неизменной, после того, как эти скорости выровняются, обе скорости будут уменьшаться с одинаковым средним значением.



2.2 Время выравнивания скоростей легко определить из закона изменения скорости поступательного движения (9):

$$\begin{aligned} \omega_0 R &= V_0 - \mu g t_1 \Rightarrow \\ t_1 &= \frac{V_0 - \omega_0 R}{\mu g}, \end{aligned} \quad (11)$$

2.3 Для расчета среднего ускорения при $V \approx v$ примем следующую модель: пусть скорость поступательного движения превышает скорость вращательного движения на малую величину ΔV , тогда эта скорость уменьшается с ускорением a_0 и достигает некоторого

значения $v - \Delta v$ (на этом этапе скорость вращательного движения остается неизменной v) – длительность этого этапа

$$\tau_1 = \frac{\Delta V + \Delta v}{a_1}. \quad (12)$$

Скорость вращательного движения превысила скорость поступательного на величину Δv , поэтому она начнет уменьшаться с ускорением a_1 и достигнет значения $V - \Delta V$, что произойдет за время

$$\tau_2 = \frac{\Delta v + \Delta V}{a_2}. \quad (13)$$

Таким образом, за время $(\tau_1 + \tau_2)$ обе скорости уменьшились на величину $(\Delta V + \Delta v)$. Поэтому средние ускорения оказываются одинаковыми и равными

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta V + \Delta v}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\Delta V + \Delta v}{\frac{\Delta v + \Delta V}{a_1} + \frac{\Delta v + \Delta V}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{3} \mu g. \quad (14)$$

2.4 Теперь путь, который пройдет диск до остановки, легко рассчитать по известной кинематической формуле

$$S = \frac{V_0^2 - \left(\frac{V_0}{2}\right)^2}{2\mu g} + \frac{\left(\frac{V_0}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{2}{3}\mu g} = \frac{9}{16} \frac{V_0^2}{\mu g}. \quad (15)$$



Республиканская физическая олимпиада 2023 года (Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач 11 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



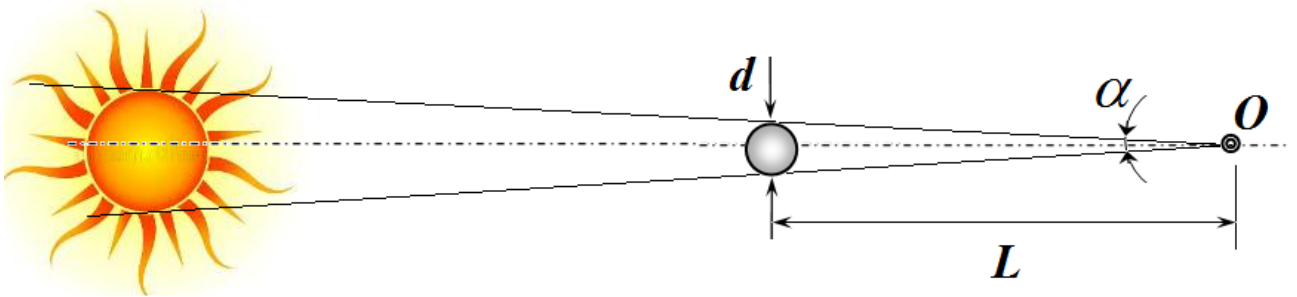
Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Размер Солнца. Решение.

Сначала рассчитаем угловой размер солнца в радианах

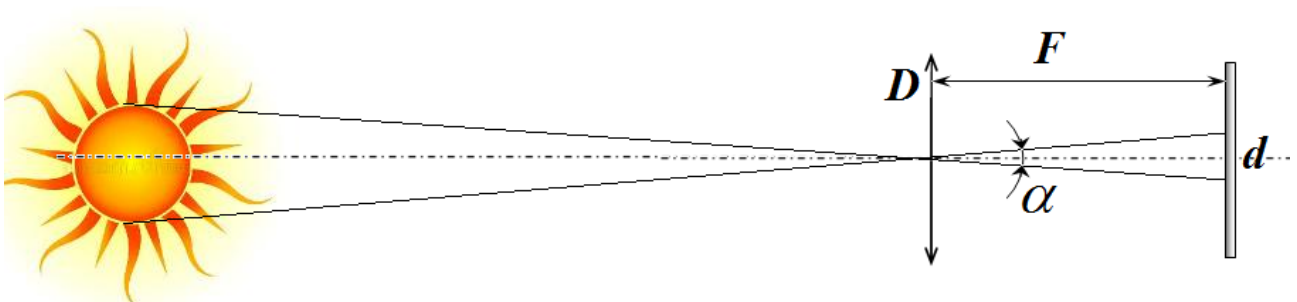
$$\alpha = 32' = \left(\frac{32}{60}\right)^\circ = \frac{\pi}{180} \left(\frac{32}{60}\right) \text{ рад} = 9,3 \cdot 10^{-3}. \quad (1)$$

1. Рисунок показывает, как шарик может полностью зарыть диск Солнца, глаз находится в точке O .



Из рисунка следует, что

$$d = L\alpha \Rightarrow L = \frac{d}{\alpha} = 0,54 \text{ м}. \quad (2)$$



2. Как следует из рисунка

Диаметр изображения Солнца на экране равен

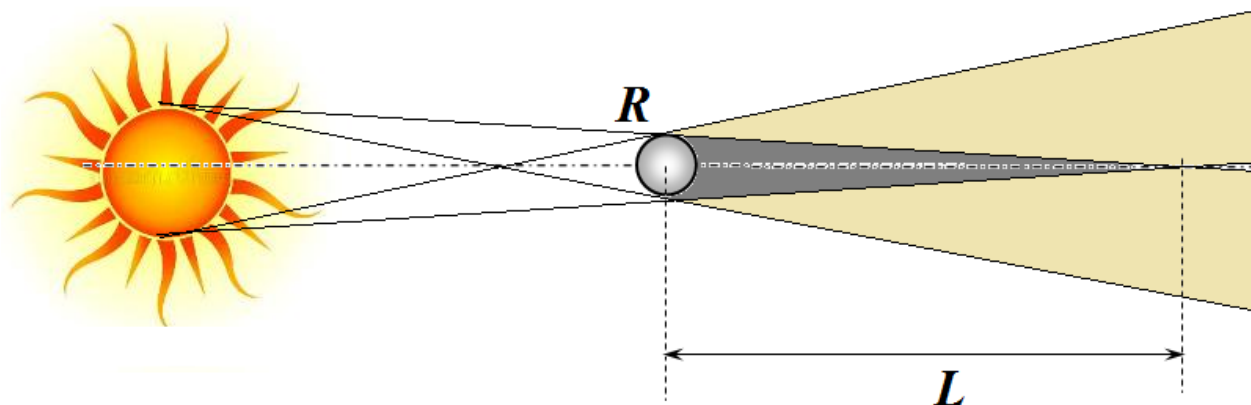
$$d = \alpha F. \quad (3)$$

Поэтому энергия, попадающая на линзу в единицу времени $P = A \frac{\pi D^2}{4}$, распределяется по

площади изображения $P = I \frac{\pi d^2}{4}$. Поэтому интенсивность света, падающего на изображение равна

$$A \frac{\pi D^2}{4} = I \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow I = A \left(\frac{D}{d}\right)^2 = A \left(\frac{D}{\alpha F}\right)^2 = 2,2 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (4)$$

3. Следующий рисунок показывает пространственные области тени и полутени, образуемые воздушным шаром.



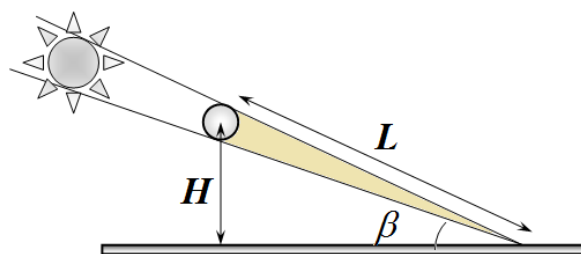
Из рисунка следует, что длина области тени равна

$$L = \frac{2R}{\alpha}.$$

(5)

Область тени будет достигать поверхности Земли, если высота подъема шара не превысит величину

$$H = L \sin \beta = \frac{2R}{\alpha} \sin \beta \approx 620 \text{ м}. \quad (6)$$



4. Каждую точку поверхности Солнца можно рассматривать как точечный источник света, причем излучения этих точек не является когерентным. Следовательно, каждая точка поверхности создает свою интерференционную картину. Суммарное распределение интенсивности света на экране будет равно сумме интенсивностей, создаваемых каждой точкой поверхности Солнца. При переходе от центральной точки поверхности к точкам, расположенным на краю диска Солнца, между колебаниями в отверстиях будет возникать дополнительная разность фаз, которая, в свою очередь, приведет к сдвигу интерференционной картины. Интерференционная картина исчезнет, если при переходе от точки, лежащей на одном краю диска к диаметрально противоположной точке интерференционная картина сместится ровно на одну полосу. Найдем изменение разности хода при смещении светящейся точки от центра диска к его краю.

На рисунке:

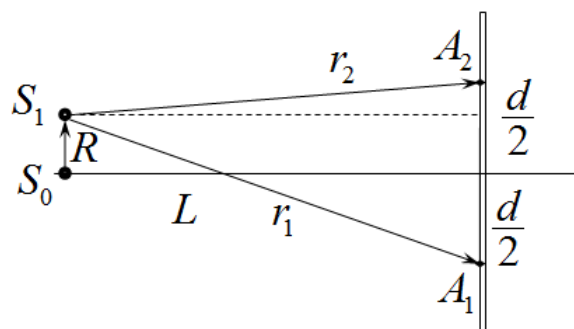
A_1, A_2 - отверстия в экране, волны из которых образуют интерференционную картину;

S_0 - точка, лежащая в центре солнечного диска;

S_1 - точка лежащая, на краю диска Солнца;

r_1, r_2 - расстояния от светящейся точки до щелей;

R - радиус Солнца; L - расстояние от Солнца до Земли.



Если рассматриваемая точка лежит в центре диска (S_0), то разность хода до щелей равна нулю. Если точка сместится на расстояние R , появится разность хода $\Delta r = r_1 - r_2$, которую

Теоретический тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

можно рассчитать следующим образом. Из простых геометрических соображений можно записать

$$\begin{aligned}r_1^2 &= L^2 + \left(\frac{d}{2} + R\right)^2 \\r_2^2 &= L^2 + \left(\frac{d}{2} - R\right)^2\end{aligned}\tag{7}$$

Вычтем из первого выражения второе $r_1^2 - r_2^2 = 2Rd$ и представим разность квадратов в виде $r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \approx 2L\Delta r$. Здесь учтено, $R \ll L$, поэтому можно считать, что сумма расстояний примерно равна удвоенному расстоянию до Солнца. Следовательно, разность хода от периферийной точки до щелей равна

$$\Delta r = \frac{Rd}{L}.\tag{8}$$

При переходе от одного края диска к другому разность хода изменяется на величину

$$(\Delta r)_{\max} = \frac{2Rd}{L} = \alpha d.\tag{9}$$

При таком изменении разности хода интерференционная картина смещается на

$$m = \frac{(\Delta r)_{\max}}{\lambda} = \frac{\alpha d}{\lambda}\tag{10}$$

полос. Как было отмечено ранее, это смещение не должно превышать одной полосы, поэтому расстояние между отверстиями не должно превышать величины

$$\frac{\alpha d}{\lambda} < 1 \Rightarrow d < \frac{\lambda}{\alpha} = 5,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}.\tag{11}$$

Что примерно равно 0,06 мм, поэтому получить интерференционную картину, используя в качестве источника света Солнце практически невозможно!

Задание 2. Кислород и водород – методы охлаждения (Решение).

1.1 Так как при расширении в пустоту газ работы не совершает, и теплообмен отсутствует, то внутренняя энергия остается постоянной. Поэтому

$$C_v T_0 - \frac{a}{V_0} = C_v T_1 - \frac{a}{V}. \quad (1)$$

Из этого уравнения находим изменение температуры газа

$$T_1 - T_0 = \frac{a}{C_v} \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \right). \quad (2)$$

Если газ идеальный, то $a = 0$, поэтому температура газа изменяться не будет $\Delta T = 0$. Для газа Ван-дер-Ваальса изменение температуры определяется формулой (2). Так как газ расширяется ($V > V_0$), то температура газа будет уменьшаться.

1.2 Для численного расчета изменения температуры необходимо знать объемы газов до и после расширения. Т.е. выразить объем газа через его температуру и давление. Для этого следует решить уравнение

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \quad (3)$$

Относительно величины V это уравнение является уравнением третьей степени, решение которого затруднительно. Оценим, можно ли при расчете объема пренебречь поправками Ван-дер-Ваальса. Так как начальное давление задано с точностью до 2 значащих цифр, то погрешность этого значения составляет величину порядка 5%. Следовательно, при расчетах допустимая погрешность также примерно равна 5%.

Рассчитаем значение объема газа, если считать его идеальным. В этом случае

$$V_0 = \frac{RT_0}{P_0} = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}. \quad (4)$$

Отношение для кислорода $\frac{b}{V_0} \approx 1,3 \cdot 10^{-2}$ (для водорода еще меньше), поэтому поправкой b можно пренебречь. Аналогично оценим второе слагаемое в уравнении (3):

$\delta P = \frac{a}{V_0^2} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Па}$, относительно давления газа эта величина составляет примерно

$\frac{\delta P}{P_0} \approx 0,02$, что также меньше допустимой погрешности расчетов, поэтому и этой поправкой

можно пренебречь. После расширения численные величины поправок будут вносить еще меньший вклад, поэтому ими также можно пренебречь. Подставим формулу для объема (4) в выражение (2):

$$T_1 - T_0 = \frac{a}{C_v} \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \right) = \frac{a}{C_v} \left(\frac{P_1}{RT_1} - \frac{P_0}{RT_0} \right). \quad (5)$$

В этом выражении второе слагаемое превышает первое примерно в 10 раз, поэтому изменение температуры можно оценить, пренебрегая первым слагаемым, эта оценка дает следующее значение

$$T_1 - T_0 = \frac{a}{C_v} \left(\frac{P_1}{RT_1} - \frac{P_0}{RT_0} \right) \approx -\frac{a}{C_v V_0} \approx 3 \text{ К}. \quad (6)$$

Таким образом, $\frac{\Delta T}{T_0} \approx 0,01$, поэтому в левой части формулы (5) можно положить $T_1 = T_0$,

тогда окончательно получим

$$T_1 - T_0 \approx \frac{a}{C_v} \left(\frac{P_1}{RT_0} - \frac{P_0}{RT_0} \right) \approx -\frac{a}{C_v RT_0} (P_0 - P_1). \quad (7)$$

Численные расчеты дают следующие значения

Для кислорода

$$\Delta T = -2,4K; \quad (8)$$

Для водорода

$$\Delta T = -0,43K. \quad (9)$$

Часть 2. Дросселирование.

2.1 В соответствии с первым законом термодинамики изменение внутренней энергии газа равно разности работы, совершенной поршнем П1 над газом $A_1 = P_1 V_1$ и работы, совершенной газом над поршнем П2 $A_2 = P_2 V_2$:

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2. \quad (10)$$

После перегордки газ подчиняется уравнению состояния идеального газа, поэтому

$$\begin{aligned} P_2 V_2 &= RT_2 \\ U_2 &= C_v T_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Также используем выражение для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса. Тогда уравнение (10) принимает вид

$$C_v T_2 - \left(C_v T_1 - \frac{a}{V_1} \right) = P_1 V_1 - RT_2. \quad (12)$$

Из уравнения Ван-дер-Ваальса получим

$$P_1 V_1 = RT_1 \frac{V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1}. \quad (13)$$

И продолжим преобразования формулы (12):

$$\begin{aligned} C_v T_2 - C_v T_1 + \frac{a}{V_1} &= RT_1 \frac{V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} - RT_2 \Rightarrow \\ (C_v + R)T_2 - C_v T_1 - RT_1 &= RT_1 \frac{V_1}{V_1 - b} - RT_1 - \frac{2a}{V_1} \Rightarrow \\ (C_v + R)(T_2 - T_1) &= RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \end{aligned} \quad (14)$$

Окончательно находим требуемую формулу для изменения температуры

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{C_v + R} \left(RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right). \quad (15)$$

2.2 Газ охлаждается, если $T_2 < T_1$, что выполняется, если

$$RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} < 0. \quad (16)$$

Или при

$$T_1 < \frac{2a}{Rb} \left(1 - \frac{b}{V_1} \right). \quad (17)$$

Эта температура будет максимальной, если $V_1 \gg b$. В этом случае

$$T_{1\max} < \frac{2a}{Rb}. \quad (18)$$

2.3 Подстановка численных значений дает следующие результаты

Для кислорода $T_{1\max} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ K}$;

Для водорода $T_{1\max} = 2,2 \cdot 10^2 \text{ K}$.

Обратите внимание, кислород в ходе дросселирования начинает охлаждаться при комнатной температуре, для охлаждения водорода при дросселировании его предварительно необходимо охладить до температуры порядка -100°C .

Задание 10-2. Гемодинамика - артериальная система. Решение.

Часть 1. Предварительные расчеты.

1.1 Формулы:

1.1.1 Расход жидкости может быть выражен формулой

$$q = vS, \quad (1)$$

где $S = \pi R^2$ - площадь поперечного сечения трубы, v - средняя по поперечному сечению скорость течения, которая может быть выражена через расход жидкости, как

$$v = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2}. \quad (2)$$

1.1.2 Очевидно, что время движения жидкости по трубе равно

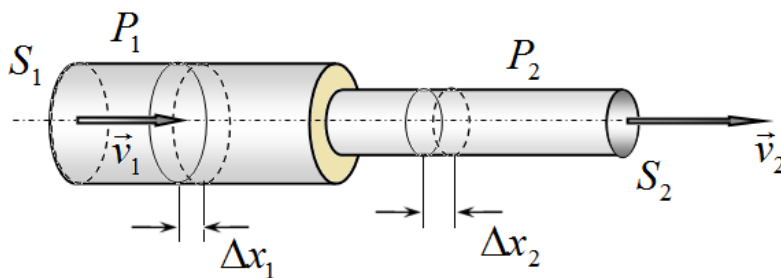
$$t = \frac{L}{v} = \frac{\pi R^2 L}{q}. \quad (3)$$

Это же выражение может быть представлено, как объем трубы, деленный на расход жидкости $t = \frac{V}{q}$.

1.1.3 Из формулы Пуазейля легко выразить разность давлений через расход жидкости

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} q. \quad (4)$$

1.2 Обозначим скорость течения жидкости в первой трубе v_1 , во второй - v_2 ; площади поперечных сечений - S_1, S_2 , давления в трубах P_1, P_2 . Так как жидкость является идеальной, то давление изменяется скачком только в области стыка двух



труб. Рассмотрим порцию жидкости, находящуюся между двумя произвольно выбранными сечениями (одно в широкой части трубы, второе в узкой части). Пусть за малый промежуток времени первое сечение сместилось на расстояние Δx_1 , тогда второе сечение сместится на расстояние Δx_2 . Так как жидкость несжимаема, то выполняется соотношение

$$\Delta V = S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2. \quad (5)$$

Эта величина имеет смысл объема, протекшего через поперечное сечение трубы за рассматриваемый промежуток времени. Скорость этой порции жидкости изменилась от v_1 до v_2 . Следовательно, возросла и кинетическая энергия этой порции жидкости. Изменение кинетической энергии обусловлено работой внешних сил (т.е. сил давления жидкости на выделенную порцию), поэтому можно записать:

$$P_1 S_1 \Delta x_1 - P_2 S_2 \Delta x_2 = \frac{1}{2} \rho S_1 \Delta x_1 (v_2^2 - v_1^2). \quad (6)$$

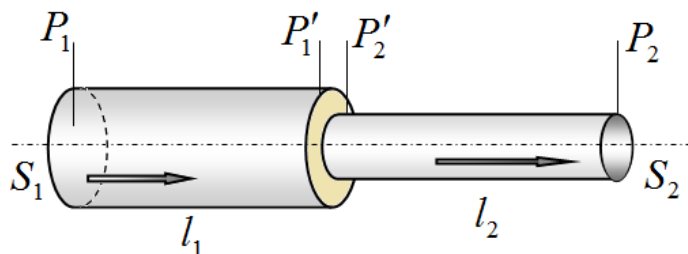
Учитывая соотношение (5), получим уравнение (которое фактически является уравнением Бернулли):

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2). \quad (7)$$

Скорости течения жидкости выразим через расход жидкости $v = \frac{q}{S}$ и подставим в уравнение (7):

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right). \quad (8)$$

1.3 При течении вязкой жидкости давление изменяется и в пределах трубы постоянного течения. Обозначим давления в различных сечениях, как показано на рисунке.



Запишем уравнения для изменения давлений на всех участках составной трубы (используя формулы (4) и (8)):

$$\begin{aligned} P_1 - P_1' &= \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4} q \\ P_1' - P_2' &= \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right). \\ P_2' - P_2 &= \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4} q \end{aligned} \quad (9)$$

И просуммируем эти выражения:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) + \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4} q + \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4} q. \quad (10)$$

В результате чего получаем квадратное уравнение, правда с громоздкими коэффициентами:

$$\frac{1}{2\pi^2} \rho \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) q^2 + \frac{8\eta l}{\pi} \left(\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4} \right) q - \Delta P = 0. \quad (11)$$

При решении этого уравнения следует выбрать положительный корень:

$$q = \frac{\sqrt{b^2 + a\Delta P} - b}{a}. \quad (12)$$

где

$$a = \frac{1}{2\pi^2} \rho \left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right); \quad b = \frac{4\eta l}{\pi} \left(\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4} \right).$$

1.4 При решении этой задачи можно повторить все рассуждения п.1.2, а в окончательной формуле (8) под S_2 следует понимать суммарную площадь всех присоединенных труб, поэтому

$$\delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left(\frac{1}{n^2 R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right). \quad (13)$$

Заметим, что эта разность давлений может быть отрицательной.

Часть 2. Характеристики кровотока в артериальной системе человека.

2.1.1 – 2.1.5 Для расчета требуемых характеристик следует воспользоваться уже полученными формулами, которые следует слегка модернизировать с учетом числа сосудов в каждой группе. Приведем эти формулы, необходимые для расчетов:

Расход крови через один сосуд в группе:

$$q_i = \frac{q_0}{n_i}, \quad (14)$$

Где $q_0 = 6,0 \frac{\text{л}}{\text{мин}} = 6,0 \frac{10^{-3} \text{ м}^3}{60 \text{ с}} = 1,0 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$ - суммарный расход крови.

Площадь поперечного сечения сосуда в группе

$$S_i = \frac{\pi d_i^2}{4} \quad (15)$$

Средняя скорость течения крови в сосуде:

$$v_i = \frac{q_i}{S_i}. \quad (16)$$

Время движения через сосуд

$$t_i = \frac{l_i}{v_i}. \quad (17)$$

Разность давлений на концах сосуда

$$\Delta P_i = \frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4} q_i = \frac{8\pi\eta l_i}{(\pi R_i^2)^2} q_i = 8\pi\eta \frac{l_i}{S_i^2} q_i. \quad (18)$$

Скачок давлений на стыке сосудов

$$\delta P_i = \frac{1}{2\pi^2} \rho q_i^2 \left(\frac{1}{\left(\frac{n_{i+1}}{n_i} \right)^2 R_{i+2}^4} - \frac{1}{R_i^4} \right) = \frac{\rho q_0^2}{2} \left(\frac{1}{(n_{i+1} S_{i+1})^2} - \frac{1}{(n_i S_i)^2} \right). \quad (19)$$

Интересно отметить, что при замкнутом круге обращения (когда суммарные площади сечений в начале и конце цикла равны) сумма этих скачков давлений равна нулю.

Суммарные характеристики рассчитываются очевидным способом, как суммы соответствующих характеристик в каждой группе.

Теоретический тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

Результаты расчетов по приведенным формулам приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Расчетные характеристики артериальной системы человека

| Группа сосудов | Средняя скорость течения крови, v_i , м/с | Время движения t_i , с | Разность давлений на концах сосуда ΔP_i , Па | Скачок давления при переходе в следующую группу δP_i , Па |
|-----------------|---|--------------------------|--|---|
| Аорта | 0,54 | 1,10 | 180 | -36 |
| Крупные артерии | 0,47 | 0,99 | 4560 | -83 |
| Мелкие артерии | 0,24 | 0,25 | 7450 | -29 |
| Капилляры | 0,0012 | 0,51 | 1400 | - |

Общее время движения крови по артериальной системе равно 2,0 с.

Разность давлений на входе и выходе из артериальной системы (сумма двух последних столбцов) равно 13 кПа, что примерно равно 100 мм рт. ст. Следует отметить, что скачки давлений в местах разветвления сосудов, во-первых, отрицательны (т.к. общая площадь поперечных сечений сосудов в каждой группе увеличивается); во-вторых, не слишком значительны.

2.2 Разумно считать, что разность давлений в венозной системе также примерно равна 100 мм рт. ст. Поэтому суммарное давление, которое должно создавать сердце, примерно в два раза превышает реальное сердечное давление. Основная причина такого существенного расхождения заключается в том, что сосуды функционируют гораздо сложнее, чем жесткие трубки. Они проходят через различные мышцы тела, которые могут способствовать лучшему протеканию крови, т.е. работают как своеобразные «микронасосы».

